**MAT2050 : analyse 2, automne 2018**
**Travaux pratiques #7, 29 novembre**

**Exercise 1.** Soit $f \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$.

(a) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, montrez que
$$\hat{f}(n) = \int_c^{c+1} f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x.$$

(b) Supposons que $f$ est paire sur l'intervalle $(-1/2, 1/2)$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour $|x| < 1/2$. Montrez que
$$\hat{f}(n) = 2 \int_0^{1/2} f(x) \cos(2\pi n x) \mathrm{d}x.$$

**Exercise 2.** Soient $f$ et $g$ les fonctions 1-périodiques définies par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 < x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1/2 < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1/2. \end{cases}$$
Calculez leurs séries de Fourier et évaluez-les en $x = 0$. Qu'est-ce que vous observez ?

**Exercise 3.** Soient $f \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$ et $a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots, a_N$ quelques nombres complexes. Posons
$$T(x) = \sum_{|n| \leq N} a_n e^{2\pi i n x}.$$

(a) Montrez que
$$\int_0^1 |T(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$
[*Indice* : $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.]

(b) Montrez que
$$\int_0^1 f(x) \overline{T(x)} dx = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) \overline{a_n}.$$

(c) Déduisez que
$$\int_0^1 |f(x) - T(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |f(x) - S_N f(x)|^2 dx;$$
de plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $a_n = \hat{f}(n)$ pour tout $n \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$.

**Exercise 4.** Montrez que
$$x(1-x) = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2} \qquad (0 \leq x \leq 1).$$
Déduisez que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exercise 5.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que $f(x) = -1$ si $x \in [-1/2, 0)$ et $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2)$. Calculez les coefficients de Fourier de $f$ et la valeur de la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ qu'elle converge.