MAT2050 : analyse 2, automne 2018
Travaux pratiques #6, 15 novembre

Exercise 1. Considérez les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^{1/\log\log x}, \quad f_2(x) = e^{\sqrt{\log x}}, \quad f_3(x) = (\log x)^A, \quad f_4(x) = \sqrt{x},$$
$$f_5(x) = e^x, \quad f_6(x) = \frac{x}{(\log x)^A}, \quad f_7(x) = \frac{x}{e^{\sqrt{\log x}}}, \quad f_8(x) = \log\log x,$$

où $A > 0$ est une constante fixée. Ordonnez les fonctions en termes de leur ordre de magnitude lorsque $x \to \infty$, c'est-à-dire trouvez une permutation $\sigma \in S_8$ telle que $f_{\sigma(1)}(x) \ll f_{\sigma(2)}(x) \ll \cdots \ll f_{\sigma(8)}(x)$ lorsque $x \to \infty$.s

Exercise 2. Montrez les estimations asymptotiques suivantes :

(a) $\log(1+\delta) = \delta + O(\delta^2)$ pour $\delta \in [-1/2, 1/2]$;

(b) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + O(1/\sqrt{x})$ pour $x \geq 1$;

(c) $e^\delta = 1 + O(\delta)$ pour $|\delta| \leq 1$;

Exercise 3.

(a) Pour chaque $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, montrez qu'il existe un polynôme P_k de degré $k+1$ et de coefficient de tête $\frac{1}{k+1}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N} n^k = P_k(N).$$

Déduisez que

$$\sum_{n \leq x} n^k = \frac{x^{k+1}}{k+1} + O_k(x^k)$$

pour tout $x \in [1, +\infty)$.

(b) Montrez que les polynômes P_k de la partie (a) satisfassent l'équation recursive

$$(k+1)P_k(x) = x(x+1)^k - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j-1} P_j(x).$$

Exercise 4. Montrez qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\sin(\log n)}{n} = -\cos(\log x) + c + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour tout $x \geq 1$. Est-ce que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\log n)}{n}$$

converge ?

Exercise 5. On sait que

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \geq 2).$$

Montrez qu'on ne peut pas améliorer le terme d'erreur, c'est-à-dire de remplacer la fonction $1/x$ dans le grand-Oh par une fonction $f(x)$ telle que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1/x} = 0$. [*Indice :* La fonction $x \to \sum_{n \leq x} 1/n$ saute chaque fois que x passe par un entier.]