MAT2050 : analyse 2, automne 2018
Travaux pratiques #6, 22 novembre

Exercise 1. Montrez qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{n \le x} \frac{\sin(\log n)}{n} = -\cos(\log x) + c + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour tout $x \ge 1$. Est-ce que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\log n)}{n}$$

converge ?

Exercise 2. On sait que

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \ge 2).$$

Montrez qu'on ne peut pas améliorer le terme d'erreur, c'est-à-dire de remplacer la fonction $1/x$ dans le grand-Oh par une fonction $f(x)$ telle que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1/x} = 0$. [*Indice :* La fonction $x \to \sum_{n \le x} 1/n$ saute chaque fois que x passe par un entier.]

Exercise 3. Soit $f \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$.

(a) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, montrez que

$$\hat{f}(n) = \int_c^{c+1} f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}x.$$

(b) Supposons que f est paire sur l'intervalle $(-1/2, 1/2)$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour $|x| < 1/2$. Montrez que

$$\hat{f}(n) = 2\int_0^{1/2} f(x)\cos(2\pi n x)\mathrm{d}x.$$

Exercise 4. Soient f et g les fonctions 1-périodiques définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 < x \le 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \le 1/2, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1/2 < x \le 0 \\ x & \text{si } 0 < x \le 1/2. \end{cases}$$

Calculez leurs séries de Fourier et évaluez-les en $x = 0$. Qu'est-ce que vous observez ?

Exercise 5. Soient $f \in \mathcal{F}_{\text{pér}}$ et $a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots, a_N$ quelques nombres complexes. Posons

$$T(x) = \sum_{|n| \le N} a_n e^{2\pi i n x}.$$

(a) Montrez que

$$\int_0^1 |T(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

[*Indice* : $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.]

(b) Montrez que

$$\int_0^1 f(x)\overline{T(x)}dx = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)\overline{a_n}.$$

(c) Déduisez que

$$\int_0^1 |f(x) - T(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |f(x) - S_N f(x)|^2 dx;$$

de plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $a_n = \hat{f}(n)$ pour tout $n \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$.