MAT2050 : analyse 2, automne 2018
Travaux pratiques #5, 8 novembre

Exercice 1 (Rudin, exercice 7.23)**.** Soit $P_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$, posons

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n(x)^2}{2}.$$

Montrez que $P_n(x) \to |x|$ lorsque $n \to \infty$ uniformément pour $x \in [-1, 1]$. [*Indice* : Utilisez l'identité

$$|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n(x)) \cdot \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right).$$

Déduisez que $0 \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq |x|$, ainsi que

$$|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{2}{n+1},$$

pour $x \in [-1, 1]$.]

Exercice 2. Rappelez que $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f, |f| \in \mathcal{R}^*((-\infty, \infty)),\ f \text{ bornée}\}$.

(a) Soient deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}$ et considérons leur convolution $f * g$. Si g'' existe et est bornée, montrez que $f * g$ est différentiable et que $(f * g)' = f * g'$.

(b) Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{F}$ continue, trouvez une suite des fonctions $(f_n)_{n \geq 1} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ convergeant vers f uniformément sur chaque intervalle fini $[a, b]$.

Exercice 3. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $g \geq 0$. Supposons que $f, g \in \mathcal{R}([-M, M])$ pour tout $M \geq 1$.

(a) Si

$$\int_{-M}^{M} g(x)dx = O(1) \quad (M \geq 1),$$

alors montrez que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ converge. [*Indice* : convergence de Cauchy.]

(b) Montrez que si $f(x) = O(g(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $g \in \mathcal{R}^*((-\infty, \infty))$, alors $f \in \mathcal{R}^*((-\infty, \infty))$.

(c) Supposons que f et g sont continues. Montrez que si $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et les limites $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existent et sont finies, alors $f(x) = O(g(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(d) Utilisez les parties au-dessus pour montrez que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x)(x^{10} - x^5 + x^2 + 1) \log(|x| + 1)}{(x + \sin x)e^{\sqrt{|x|}}} dx$$

converge.

Exercice 4. Montrez que

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(nx) \ll \frac{1}{|x|} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} \sin(nx) \ll \frac{1}{|x|} \quad (-\pi \leq x \leq \pi,\ x \neq 0).$$

[*Indice :* Observez que $\cos x = \Re(e^{ix})$ et $\sin x = \Im(e^{ix})$.]