MAT2050 : analyse 2, automne 2018
Travaux pratiques #4, 18 octobre

Exercice 1. Étudiez si la série des fonctions
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$$
converge uniformément sur $A=[0,1]$ et sur $B=[0,+\infty)$.

Exercice 2. Montrez que :

(a) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ converge pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

(b) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ converge uniformément sur $[-M, M]$, pour chaque $M>0$ fixé.

(c) la série $\sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(d) la fonction $x \to \sum_{n\geq 1} \sin(x/n^2)$ est differentiable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient $u_n(x) := (\sin nx)e^{-nx}$ et
$$v_n(y) := \int_{\pi}^{y} u_n(x)\mathrm{d}x.$$
Montrez que la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)$$
converge uniformément pour $y \geq \pi$.

Exercice 4. Considérons la série de fonctions
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x} \quad (x \geq 0).$$

(a) Montrez que la série converge ponctuellement sur $(0,+\infty)$.

(b) Est-ce qu'elle converge uniformément sur $(0,+\infty)$? Sur $[1,+\infty)$?

(c) Montrez que la fonction-somme est dans $\mathcal{R}^*([0,1])$ mais pas dans $\mathcal{R}([0,1])$, et calculez son intégrale impropre sur $[0,1]$.

Exercice 5. Développez les fonctions suivantes en séries de puissances autour du point x_0 indiqué et trouvez leur rayons de convergence :

(a) $f(x) = \arcsin(x)$, $x=0$;

(b) $g(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1-tx}$, $x=0$.

(Il faut justifier pourquoi les séries des puissances que vous allez trouver sont égales aux fonctions f et g.)

Exercice 6. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$
converge et calculez sa somme. [*Indice* : On a que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.]