MAT2050 : analyse 2, automne 2018
Travaux pratiques #3, 4 octobre

Exercice 1. Montrez que la définition 1.5.1 de $\mathcal{R}^*([a,b])$ est équivalente à celle du remarque 1.5.2.

Exercice 2. Étudiez la convergence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \log^\beta t}$,

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\mathrm{e}^{-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \log^\beta t}$,

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\log(1+t)}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Décidez si les intégrales suivantes convergent :

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx \qquad\qquad \text{(b)} \int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| dx$$

Exercice 4. Construisez une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

(a) $f \geq 0$;

(b) f est continue ;

(c) $\limsup_{x\to\infty} f(x) = +\infty$;

(d) $f \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$;

Exercice 5. Comme on l'a discuté au remarque 1.5.2, on a que $\mathcal{R}([a,b]) \subset \mathcal{R}^*([a,b])$. Montrez la relation plus précise

$$\mathcal{R}([a,b]) = \{f \in \mathcal{R}^*([a,b]) : f \text{ est bornée}\}.$$

[*Indice* : si $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ et la partition de la définition 1.5.1, alors $f \in \mathcal{R}([p_{j-1} + \epsilon, p_j - \epsilon])$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Utilisez ce fait pour trouver, pour chaque $\epsilon > 0$, une partition $\mathcal{P}_\epsilon$ de $[a,b]$ telle que $D(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$.]