

Classification analytique de points fixes
paraboliques de germes antiholomorphes et de
leurs déploiements
Soutenance de thèse

Jonathan Godin

Université de Montréal

7 avril 2021

Content

- 1 Motivation/contexte
- 2 Germes paraboliques antiholomorphes
 - Introduction
 - Étude locale
 - Normalisation sectorielle
- 3 Déploiements
 - Introduction
 - Paramètre canonique
 - Normalisation sectoriel
 - Classification faible
- 4 Conclusion

Itération de fonction

On considère une fonction, p.ex., $f: D(0,1) \rightarrow D(0,1)$ inversible.

- Pour chaque z , $\{f^{\circ n}(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'orbite de f
- f forme un *système dynamique discret*
- La *dynamique* de f est l'ensemble de ses orbites

On s'intéresse :

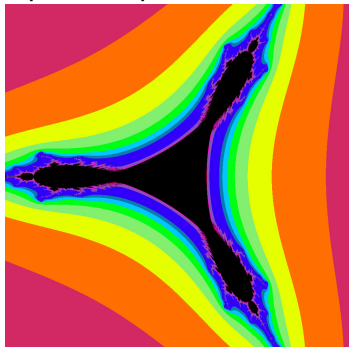
- à comprendre l'organisation des orbites;
- à décrire les invariants géométriques.

Conjugaison

- Si $h \circ f \circ h^{-1} = g$, alors $h \circ f^{\circ n} \circ h^{-1} = g^{\circ n}$
 $\Rightarrow h$ envoie les orbites de f sur les orbites de g

Antipolynômes et tricorne

Espace du paramètre $c \in \mathbb{C}$



$$p_c(z) = \bar{z}^2 + c$$

- Tricorne = $\{c \in \mathbb{C} : |p_c^{(n)}(0)| \text{ borné}\}$
- Object global lié à la famille $\{p_c\}_{c \in \mathbb{C}}$
- L'étude local aide à comprendre la tricorne

But

Systématiser l'étude local des points paraboliques et de ses déformations par un paramètre.

Partie 1

Germes paraboliques antiholomorphes

Fonctions antiholomorphes

f holomorphe

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

f antiholomorphe

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

- fonctions d'intérêts : $f(z) = a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + a_3 \bar{z}^3 + o(\bar{z}^3)$
- $|a_1| = 1$ (point parabolique)

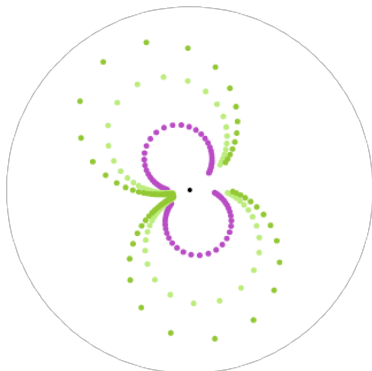
Remarque

$f \circ f$ est holomorphe

Point fixe parabolique

$$f_1(z) = \bar{z} + \frac{1}{2}e^{2i\pi/9}\bar{z}^3$$

$$f_2(z) = e^{7i\pi/36}\bar{z} + \frac{1}{2}e^{2i\pi/9}\bar{z}^2$$



- $|f_1'(0)| = |f_2'(0)| = 1$ (points paraboliques)
- mais f_1 et f_2 ne sont même pas topologiquement conjuguées

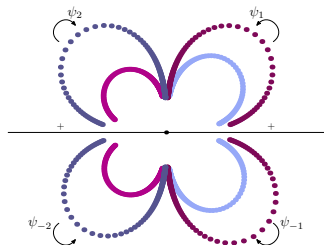
Étude locale

$f_1, f_2: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ paraboliques

Questions

- 1 Peut-on décrire géométriquement la dynamique de f_j ?
- 2 f_1 et f_2 sont-elles analytiquement conjuguées sur un voisinage de 0?
- 3 Si la réponse de 2 est négative, quelles sont les obstructions?

Invariants



- 1 codimension $k \in \mathbb{N}$ (nb de pétales $2k$)
- 2 le signe \pm
- 3 l'invariant formel $b \in \mathbb{R}$
- 4 les transitions « sur les pétales »

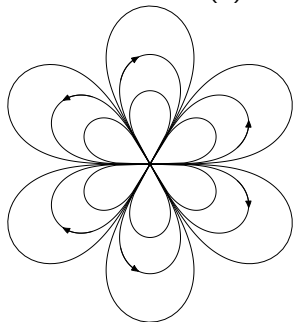
Théorème (G., Rousseau)

Les invariants 1 à 4 de f_1 et de f_2 sont équivalents ssi f_1 et f_2 sont analytiquement conjuguées.

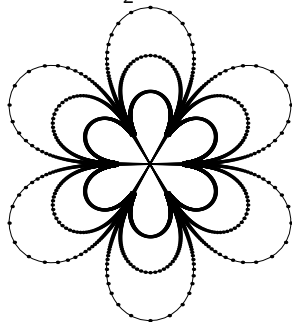
Forme normale

$$\dot{z} = v(z) := \frac{z^{k+1}}{1 + bz}$$

Flot $t \mapsto z(t)$



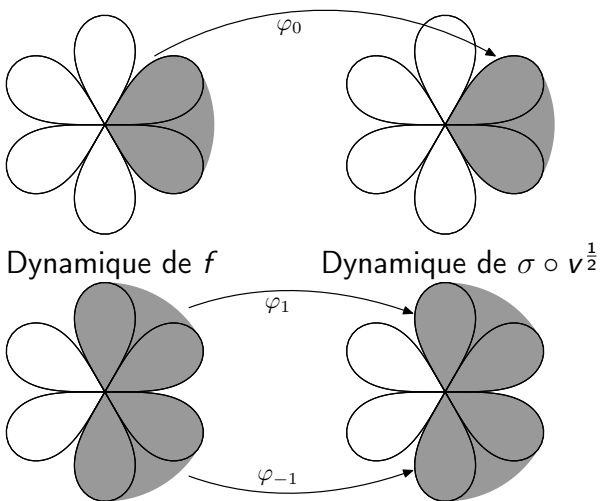
Temps- $\frac{1}{2}$ $z \mapsto v^{\frac{1}{2}}(z)$



Figures fait avec $k = 3$ et $b = 0$

Modèle : $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}} : z \mapsto \overline{v^{\frac{1}{2}}(z)}$

Normalisation sectoriel



Unicité :

Si $\tilde{\varphi}_j$ est une autre coord. de Fatou, alors

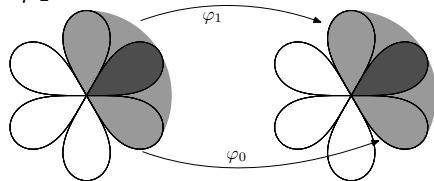
$$\tilde{\varphi}_j \circ \varphi_j = v^{t_j},$$

et $t_j = \overline{t_{-j}}$.

Coordonnée de Fatou : $\varphi_j \circ f \circ \varphi_{-j}^{-1} = \sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$ ($j = 0, 1, \dots, k$)

Fonctions de transition

On compare φ_0 et φ_1 sur leur intersection



Dynamique de f

Dynamique de $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$

$$\psi_1 = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$$

Invariant analytique

- $\sigma \circ v^{\frac{1}{2}} \circ \psi_j = \psi_{-j} \circ \sigma \circ v^{\frac{1}{2}}$
- Si on change les φ_j , alors on change les ψ_j
 \Rightarrow On considère la classe $[\psi] = \{v^c \circ \psi \circ v^d\}$
- Invariant : $[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k]$

Module de classification

Définition

Le *module de classification* de f est le triplet $(k, b, [\psi_1, \dots, \psi_k])$.

Théorème de classification (G., Rousseau)

Deux germes antiholomorphes paraboliques positifs f_j ($j = 1, 2$) sont analytiquement conjugués si et seulement s'ils ont le même module de classification $(k, b, [\psi_1, \dots, \psi_k])$.

Courbe réelle analytique invariante

Théorème (G., Rousseau)

f préserve une courbe réelle analytique si et seulement si ψ_j et $v^{\frac{1}{2}}$ commutent.

Patie 2

Déploiements

Déformations

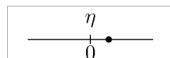
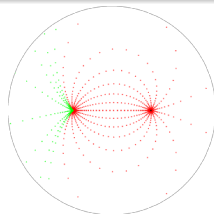
Soit f_0 un germe antiholomorphe parabolique de codimension 1.

Définition

Une *déformation à un paramètre réel* de f_0 est un germe $f: (\eta, z) \mapsto f(\eta, z)$ tel que $f(0, z) = f_0(z)$, avec η réel. On la note f_η . On appelle $\{f_\eta\}_\eta$ une *famille*. La famille est *générique* si

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \Re f_\eta \Big|_{(0,0)} \neq 0.$$

Déformation



Objectifs

Objectifs :

- Comprendre la dynamique des déformations de f_0
- Classifier les familles $\{f_\eta\}_\eta$
- Expliquer certains phénomènes géométriques de f_0

Stratégie

- Déterminer un paramètre canonique (invariant)
- Déployer l'invariant formel b
- Déployer les coordonnées de Fatou

Équivalence de familles

Définition

Deux familles $\{f_{1,\eta}\}_\eta$ et $\{f_{2,\alpha}\}_\alpha$ sont *équivalentes* s'il existe une famille de conjugaisons $\{h_\eta\}_\eta$ et un changement de paramètre $\alpha = \beta(\eta)$ tels que

$$f_{2,\beta(\eta)} = h_\eta \circ f_{1,\eta} \circ h_\eta^{-1}.$$

- L'équivalence est une relation d'équivalence
- h_η analytique en η

Paramètre canonique

- On pose $\lambda_{\pm} = (f_{\eta} \circ f_{\eta})'(z_{\pm})$, où z_{\pm} sont des points fixes
- On définit

$$\varepsilon := \left(\frac{1}{\log(\lambda_+)} - \frac{1}{\log(\lambda_-)} \right)^{-2}, \quad b(\varepsilon) := \frac{1}{\log(\lambda_+)} + \frac{1}{\log(\lambda_-)}.$$

Proposition

ε et $b(\varepsilon)$ sont des invariants

De plus, f_{η} est équivalente à la forme, dite *préparée*,

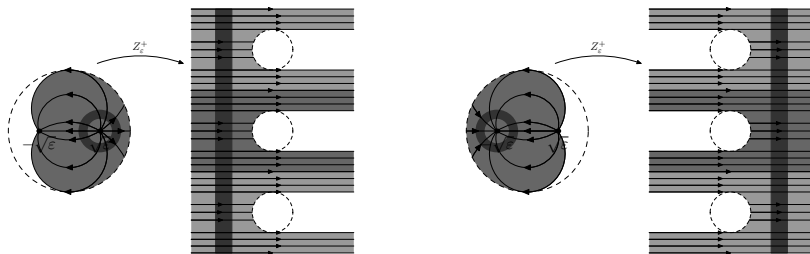
$$\tilde{f}_{\varepsilon}(z) = \bar{z} + (\bar{z}^2 - \varepsilon)R(\bar{z}, \varepsilon)$$

- $\{b(\varepsilon)\}_{\varepsilon}$ est le déploiement de l'invariant formel de f_0
- $\tilde{f}_{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}$

$\varepsilon > 0$: Domaines de translation

$$\frac{dz}{dt} = v(z) = \frac{z^2 - \varepsilon}{1 + b(\varepsilon)z}, \quad Z_\varepsilon(z) = \int dt = \int \frac{1 + b(\varepsilon)z}{z^2 - \varepsilon} dz$$

Deux cartes de la coordonnée temps



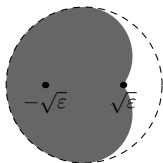
$\varepsilon > 0$: Coordonnées de Fatou

Coordonnées de Fatou

Sur chaque carte U_ε^\pm , il existe une fonction Φ_ε^\pm telle que

$$\Phi_\varepsilon^\pm \circ F \circ (\Phi_\varepsilon^\pm)^{-1} = \overline{T}_{\frac{1}{2}}, \quad \text{où } \overline{T}_{\frac{1}{2}}: Z \mapsto \overline{Z} + \frac{1}{2}.$$

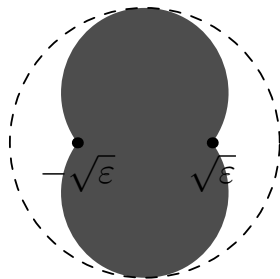
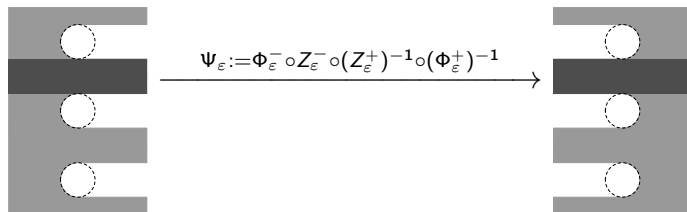
(Unicité) Si $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ est une autre coordonnée de Fatou, alors il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\Phi}_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1} = T_R$.



Les orbites de f_ε deviennent $\{Z, \overline{Z} + \frac{1}{2}, Z + 1, \overline{Z} + \frac{3}{2}, \dots\}$

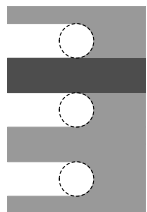
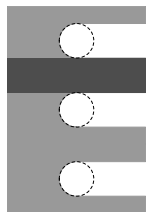
Fonctions de transition

Sur l'intersection, on compare les coordonnées de Fatou.



Ψ_ϵ envoie les orbites dans une carte sur les mêmes orbites dans l'autre carte

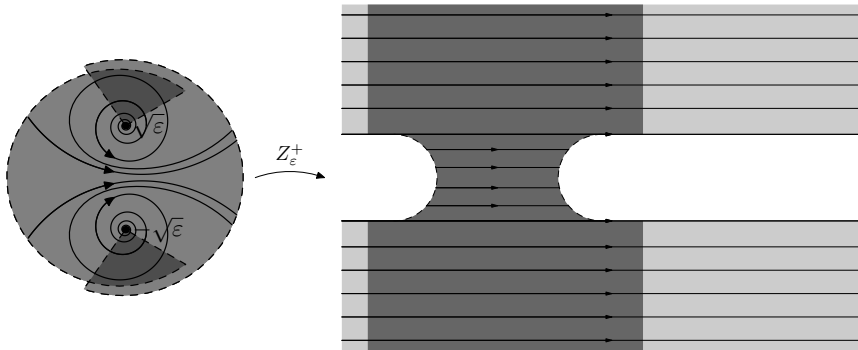
$\varepsilon > 0$: Espace des orbites



$\varepsilon < 0$: Domaines de translation

$$\frac{dz}{dt} = v(z) = \frac{z^2 - \varepsilon}{1 + b(\varepsilon)z}, \quad Z_\varepsilon(z) = \int dt = \int \frac{1 + b(\varepsilon)z}{z^2 - \varepsilon} dz$$

Carte de la coordonnée temps



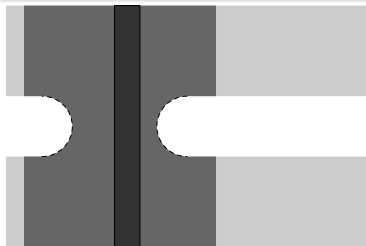
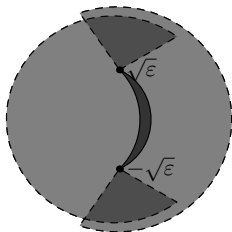
$\varepsilon < 0$: Coordonnées de Fatou

Proposition

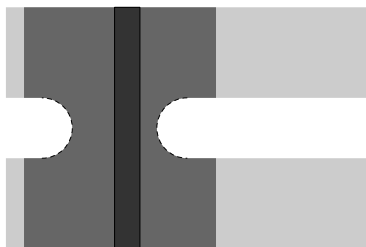
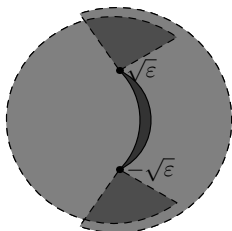
Sur chaque carte, il existe une fonction Φ_ε telle que

$$\Phi_\varepsilon \circ F \circ \Phi_\varepsilon^{-1} = \overline{T}_{\frac{1}{2}}, \quad \text{où } \overline{T}_{\frac{1}{2}}: Z \mapsto \overline{Z} + \frac{1}{2}.$$

(Unicité) Si $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ est une autre coordonnée de Fatou, alors il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\Phi}_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1} = T_R$.

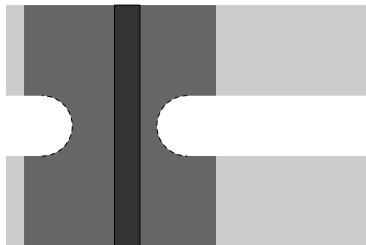
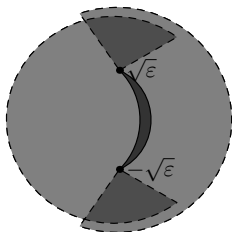


Applications de premier retour de $f_\varepsilon \circ f_\varepsilon$



Les applications de premier retour décrivent la dynamique dans un voisinage de $\pm\sqrt{\varepsilon}$.

Fonctions de transition



Module de classification

Soit la classe $[\Psi_\varepsilon] = \{T_{R_1} \circ \Psi_\varepsilon \circ T_{R_2}\}$
 $= \{\text{fonctions de transition possible de } f_\varepsilon\}$

Le *module de classification* de f_η est le triplet $(\varepsilon, b, [\Psi_\varepsilon])$.

Classification faible

Thérème (G., Rousseau)

Soit $f_{\eta,1}$ et $f_{\nu,2}$ deux déformations de germes antiholomorphes paraboliques de codimension 1. Alors $f_{\eta,1}$ et $f_{\nu,2}$ sont faiblement* équivalentes si et seulement si elles ont le même module de classification $(\varepsilon, b, [\Psi])$.

* les conjugaisons ne sont pas nécessairement analytiques en $\varepsilon = 0$

Y a-t-il une obstruction à l'analyticité en $\varepsilon = 0$?

Classification forte

Thérème (G., Rousseau)

$f_{\eta,1}$ et $f_{\nu,2}$ sont fortement équivalentes si et seulement si elles sont faiblement équivalentes.

- **Idée** : complexifier ε

Conclusion

- Classification des points paraboliques
- Espace des orbites des déformations des points paraboliques
- Classification des familles

Travail futur?

- Déploiements de points paraboliques en codimension $k > 1$