Polynômes et fractals

Jonathan Godin

Club math

Mercredi le 11 mars 2020

Méthode de Newton

- But : chercher les zéros d'un polynôme P
- Définir $F(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$
  - zéros de $P \longleftrightarrow$ points fixes de F

Méthode de Newton

- But : chercher les zéros d'un polynôme P
- Définir $F(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$
  - zéros de $P \longleftrightarrow$ points fixes de F
- Choisir un *un point initiale* x_0
- Itérer : $x_{n+1} = F(x_n)$
- Si la suite converge, sa limite est un zéro de P

Questions : Pour quelles conditions itiniales trouvera-t-on un point fixe de F ? Peut-on trouver tous les zéros de P ?

Méthode de Newton

$$F(x) := x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

Remarque. Si on considère x complexe, on n'a plus à se soucier de la question d'existence des zéros de P !

Méthode de Newton

$$F(x) := x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

Remarque. Si on considère x complexe, on n'a plus à se soucier de la question d'existence des zéros de P !

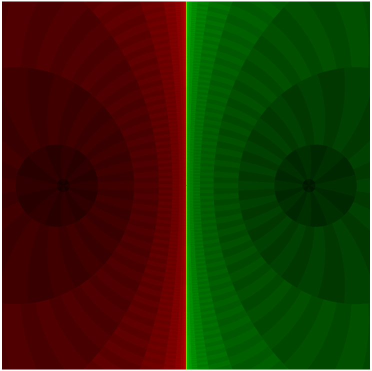
$\{$zéros de $P\} \xrightarrow{\text{Méthode de Newton}} \{$points fixes **attractifs** de $F\}$

On trouve tous les zéro de P, mais peut-on décrire les z_0 qui convergeront ?

Exemple : $p(z) = z^2 - 1$

$$F(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{z^2 - 1}{2z}$$

- Choisir $z_0 \in \mathbb{C}$
- Poser $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n}$
- Conclusion : $z_n \to 1$
  ou $z_n \to -1$
  ou $\{z_n\}$ diverge



Systèmes dynamiques discrets

Soit R une fonction rationnelle.

1. $\left(\mathbb{C}, \left\{R^{\circ n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}\right)$ forme un *système dynamique discret*

Systèmes dynamiques discrets

Soit R une fonction rationnelle.

1. $\left(\mathbb{C}, \left\{R^{\circ n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme un *système dynamique discret*
2. La suite $\{R^{\circ n}(x)\}$ s'appelle *l'orbite de x*

Systèmes dynamiques discrets

Soit R une fonction rationnelle.

1. $\left(\mathbb{C}, \left\{R^{\circ n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme un *système dynamique discret*
2. La suite $\{R^{\circ n}(x)\}$ s'appelle *l'orbite de x*
3. z_0 est un *point fixe* si $R(z_0) = z_0$

Systèmes dynamiques discrets

Soit R une fonction rationnelle.

1. $\left(\mathbb{C}, \left\{R^{\circ n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme un *système dynamique discret*
2. La suite $\{R^{\circ n}(x)\}$ s'appelle *l'orbite de* x
3. z_0 est un *point fixe* si $R(z_0) = z_0$
4. z est *périodique* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $R^{\circ n}(z) = z$; le plus petit tel n est la *période*

Systèmes dynamiques discrets

Soit R une fonction rationnelle.

1. $\left(\mathbb{C}, \left\{R^{\circ n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme un *système dynamique discret*
2. La suite $\{R^{\circ n}(x)\}$ s'appelle *l'orbite de x*
3. z_0 est un *point fixe* si $R(z_0) = z_0$
4. z est *périodique* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $R^{\circ n}(z) = z$; le plus petit tel n est la *période*
5. z est *pré-périodique* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $R^{\circ n}(z)$ est périodique

Systèmes dynamiques discrets

Soit R une fonction rationnelle.

1. $\left(\mathbb{C}, \left\{R^{\circ n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme un *système dynamique discret*
2. La suite $\{R^{\circ n}(x)\}$ s'appelle *l'orbite de x*
3. z_0 est un *point fixe* si $R(z_0) = z_0$
4. z est *périodique* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $R^{\circ n}(z) = z$; le plus petit tel n est la *période*
5. z est *pré-périodique* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $R^{\circ n}(z)$ est périodique

Question (plus générale) : Peut-on décrire l'organisation des orbites, c.-à-d. la dynamique ?

Exemple : Itération de $p(z) = z^2$

- Point initial : z_0
- Orbite : $$z_{n+1} = p(z_n) = z_n^2 = z_0^{2^n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & z = x + iy = re^{i\theta} \\ & \text{où} \quad r = \text{dist. entre } z \text{ et } 0 \\ & \qquad\quad = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ & \qquad \theta = \text{angle entre axe des } x \text{ et (x,y)} \\ & \qquad\quad = \arctan(y/x) \end{aligned}}$$

Exemple : Itération de $p(z) = z^2$

- Point initial : z_0
- Orbite : $$\begin{aligned} z_{n+1} &= p(z_n) \\ &= z_n^2 \\ &= z_0^{2^n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &z = x + iy = re^{i\theta} \\ &\text{où} \;\; r = \text{dist. entre } z \text{ et } 0 \\ &\qquad\quad = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\qquad \theta = \text{angle entre axe des } x \text{ et (x,y)} \\ &\qquad\quad = \arctan\left(y/x\right) \end{aligned}}$$

- $|z| < 1$
  - $|p^{\circ n}(z)| = |z|^{2^n}$
  - $|p^{\circ n}(z)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$

Exemple : Itération de $p(z) = z^2$

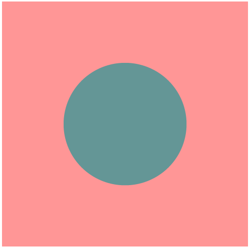
- Point initial : z_0
- Orbite : $$z_{n+1} = p(z_n) = z_n^2 = z_0^{2^n}$$

$z = x + iy = re^{i\theta}$
où r = dist. entre z et 0
$= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
θ = angle entre axe des x et (x,y)
$= \arctan(y/x)$

- $|z| < 1$
  - $|p^{\circ n}(z)| = |z|^{2^n}$
  - $|p^{\circ n}(z)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$
- $|z| > 1$
  - $|p^{\circ n}(z)| = |z|^{2^n}$
  - $|p^{\circ n}(z)| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$

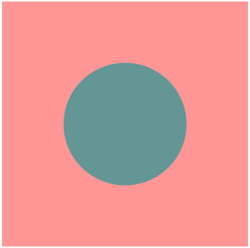
Exemple : Itération de $p(z) = z^2$

- Et pour $|z| = 1$?
  - On écrit $z = e^{i\theta}$
  - On a
$$\begin{aligned} p(e^{i\theta}) &= e^{2i\theta} \\ &\vdots \\ p^{\circ n}(e^{i\theta}) &= e^{2^n i\theta} \end{aligned}$$



Exemple : Itération de $p(z) = z^2$

- Et pour $|z| = 1$?
  - On écrit $z = e^{i\theta}$
  - On a $$p(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$$ $$\vdots$$ $$p^{\circ n}(e^{i\theta}) = e^{2^n i\theta}$$



- On voit que
  - $p(1) = 1$
  - $\exp\left(\frac{2i\pi\ell}{2^m-1}\right)$ est une orbite périodique de période m
- Les orbites périodique sont denses dans le cercle $|z| = 1$
- Elles sont toutes *répulsives*
- La dynamique est *chaotique* dans le cercle

Une diapo pour Julien

Un *polynôme de Tchebychev* T_k est un polynôme de degré k défini récursivement

$$\begin{aligned} T_0(z) &= 1 \\ T_1(z) &= z \\ T_{n+1}(z) &= 2zT_n(z) - T_{n-1}(z) \end{aligned}$$

Une diapo pour Julien

Un *polynôme de Tchebychev* T_k est un polynôme de degré k défini récursivement

$$\begin{aligned} T_0(z) &= 1 \\ T_1(z) &= z \\ T_{n+1}(z) &= 2zT_n(z) - T_{n-1}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_0(z) &= 1 \\ T_1(z) &= z \\ T_2(z) &= 2z^2 - 1 \\ T_3(z) &= 4z^3 - 3z \\ T_4(z) &= 8z^4 - 8z^2 + 1 \\ T_5(z) &= 16z^5 - 20z^3 + 5z \end{aligned}$$

Une diapo pour Julien

$$\begin{aligned} T_0(z) &= 1 \\ T_1(z) &= z \\ T_{n+1}(z) &= 2zT_n(z) - T_{n-1}(z) \end{aligned}$$

Ils satisfont à la relation

$$\cos(kz) = T_k(\cos z)$$

$$\Rightarrow (T_k)^{\circ n}(\cos z) = \cos(k^n z)$$

On a

$$\varphi \circ T_k(z) = \big(\varphi(z)\big)^k \qquad \text{où } \varphi(z) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

donc la dynamique de T_k sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ est équivalente à celle de z^k sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$!

Ensemble de Fatou

Théorème de Bolzano-Weierstraß
Soit $X \subseteq \mathbb{R}$. Si X est borné, alors toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.

Ensemble de Fatou

Théorème de Bolzano-Weierstraß
Soit $X \subseteq \mathbb{R}$. Si X est borné, alors toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.

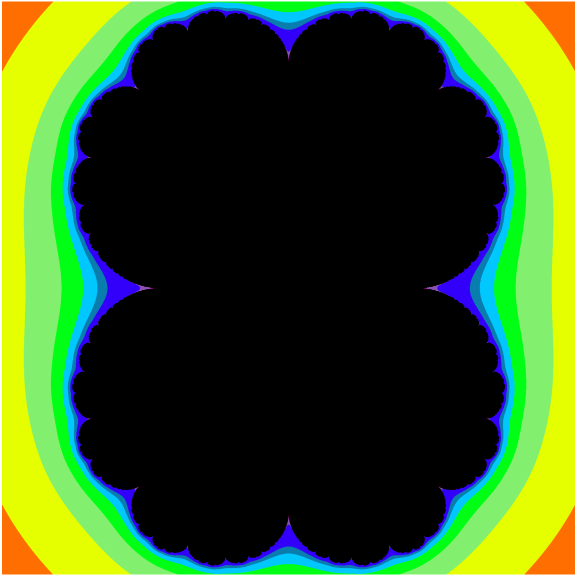
Théorème de Montel
Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$. Si $\mathcal{F}$ est équi-bornée, alors toute suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente uniforme sur tout compacte de D.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *normale*.

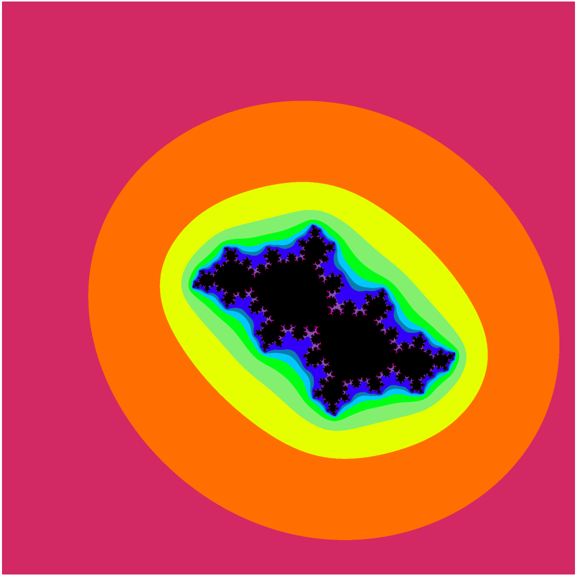
Soit P un polynôme :

- $F(P) = \left\{ z \,\middle|\, \exists D(z,r),\ \{R^{\circ n}|_{D(z,r)}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est normale} \right\}$

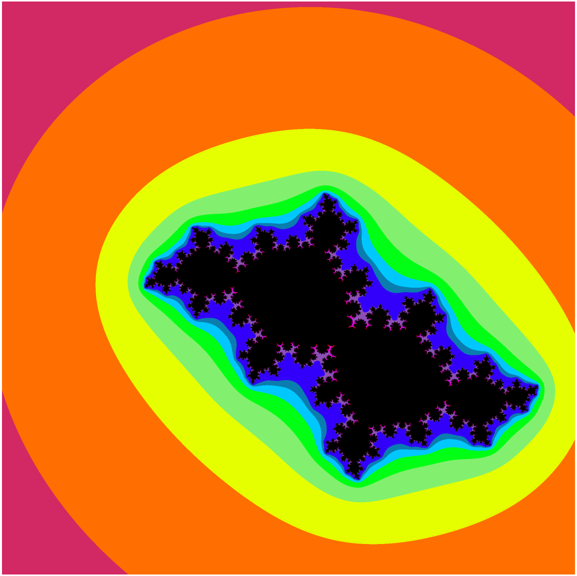
Ensemble de Julia rempli de $z^2 + \frac{1}{4}$



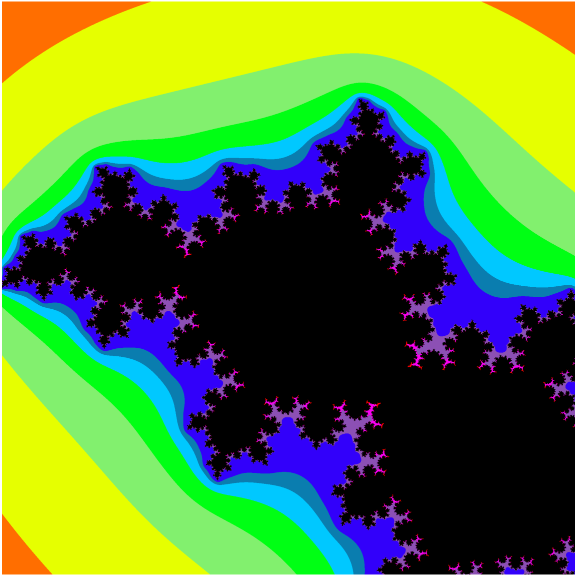
Ensemble de Julia rempli de $e^{i\pi(\sqrt{5}+1)}z + z^2$



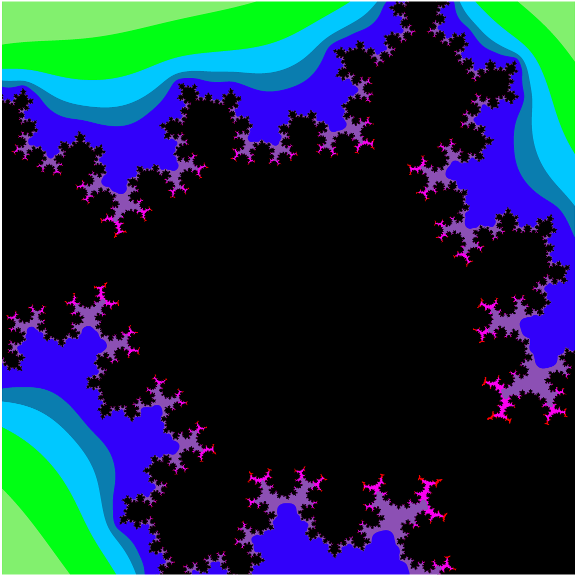
Ensemble de Julia rempli de $e^{i\pi(\sqrt{5}+1)}z + z^2$ (zoom)



Ensemble de Julia rempli de $e^{i\pi(\sqrt{5}+1)}z + z^2$ (zoom++)



Ensemble de Julia rempli de $e^{i\pi(\sqrt{5}+1)}z + z^2$ (zoom++)



Retour à la méthode de Newton

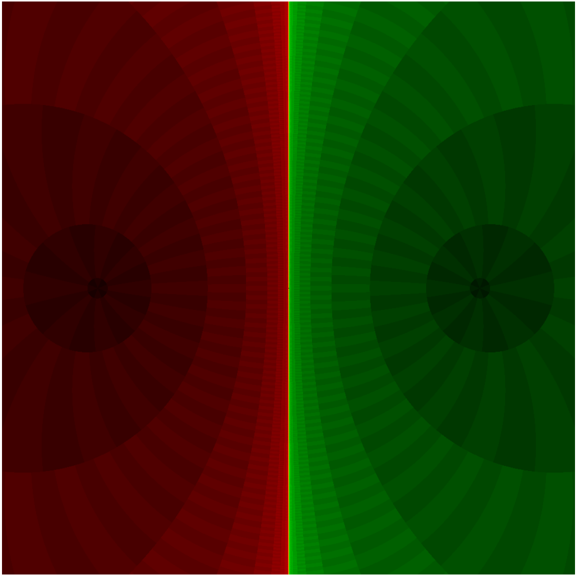
Question initiale :

- Peut-on décrire l'ensemble des valeurs initiales qui convergeront vers un zéro du polynôme P ?

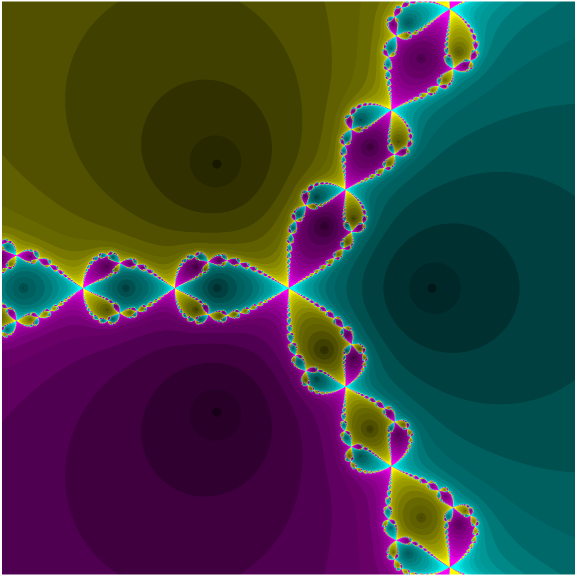
Formulation équivalente

- Peut-on décrire l'ensemble de Fatou de la fonction rationnelle $R(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$?

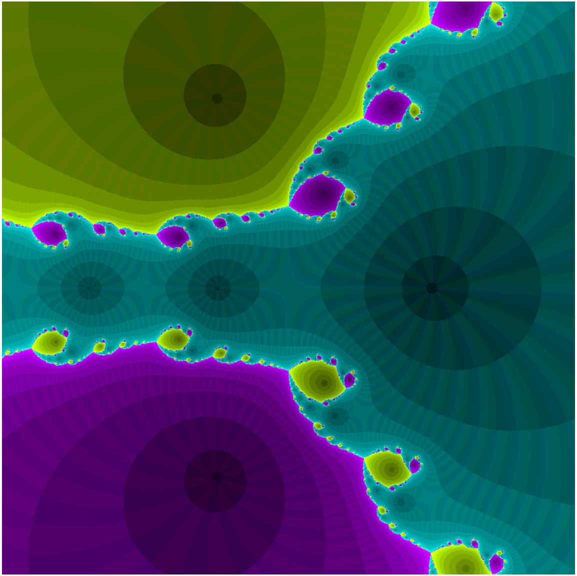
Méthode de Newton sur $P(z) = z^2 - 1$



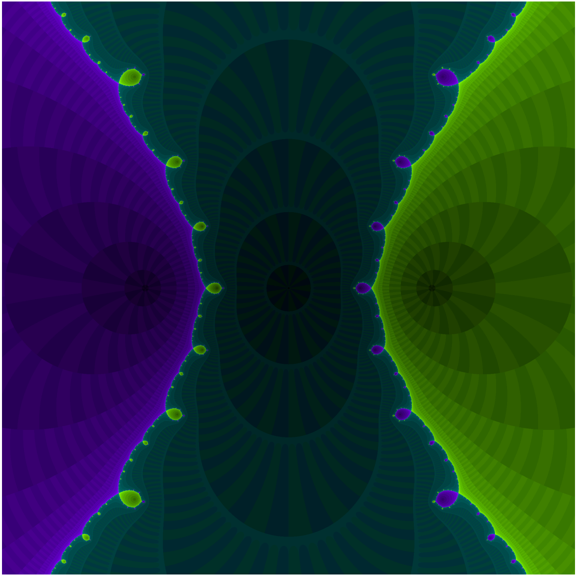
Méthode de Newton sur $P(z) = z^3 - 1$



Méthode de Newton sur $P(z) = z^3 + z - 2$



Méthode de Newton sur $P(z) = z^3 - z$



Algorithme pour un polynôme (The Beauty of Fractals)

Assume the monitor has a graphical resolution of a times b points. Let there be $K+1$ colors that can be displayed simultaneously, numbered 0 through K. Color 0 is black.

Algorithme pour un polynôme (The Beauty of Fractals)

> Assume the monitor has a graphical resolution of a times b points. Let there be $K+1$ colors that can be displayed simultaneously, numbered 0 through K. Color 0 is black.

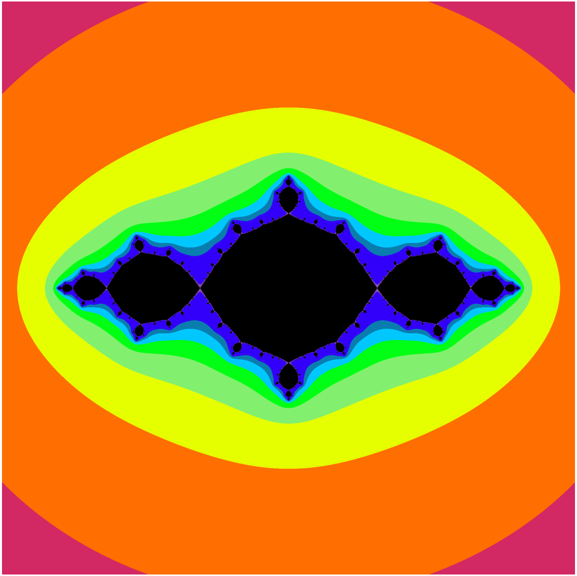
- On pose $x_{\min} = y_{\min} = -1$ et $x_{\max} = y_{\max} = 1$, $M = 100$, $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/(a-1)$, $\Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/(b-1)$

Algorithme pour un polynôme (The Beauty of Fractals)

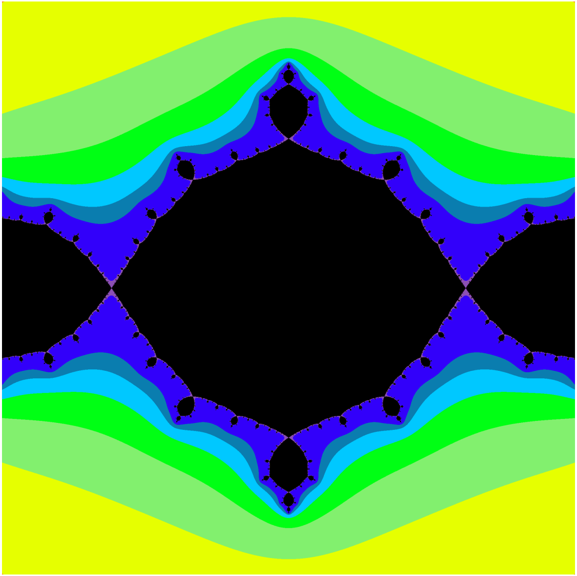
> Assume the monitor has a graphical resolution of a times b points. Let there be $K+1$ colors that can be displayed simultaneously, numbered 0 through K. Color 0 is black.

- On pose $x_{\min} = y_{\min} = -1$ et $x_{\max} = y_{\max} = 1$, $M = 100$, $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/(a-1)$, $\Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/(b-1)$
- Pour $n_x = 0, \ldots, a-1$ et $n_y = 0, \ldots, b-1$:
  1. $x_0 = x_{\min} + n_x \cdot \Delta x, \quad y_0 = y_{\min} + n_y \cdot \Delta y$
  2. Calculer $z_{k+1} = P(z_k)$; incrémenter k
  3. Calculer $r = |z_k|$
     - i) Si $r > M$, choisir la couleur k et passer à l'étape 4 ;
     - ii) Si $k = K$, choisir la couleur noir et passer à l'étape 4 ;
     - iii) $r \leq M$ et $k < K$: retourner à l'étape 2.
  4. Colorier le pixel (n_x, n_y) avec la couleur k ; reprendre l'étape 1.

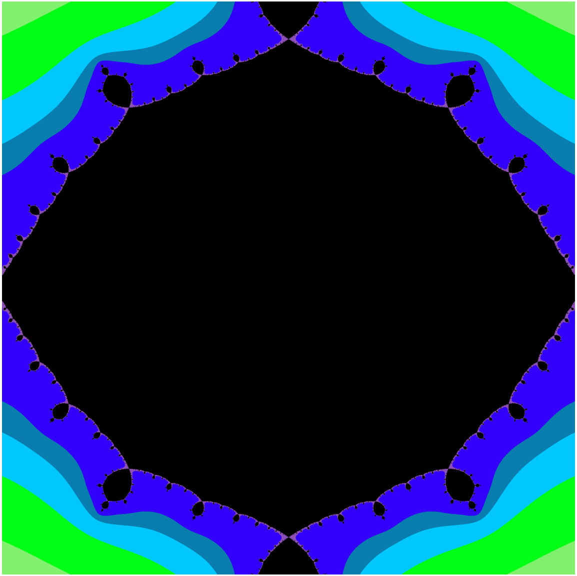
Ensemble de Julia rempli de $p(z) = z^2 - 1$



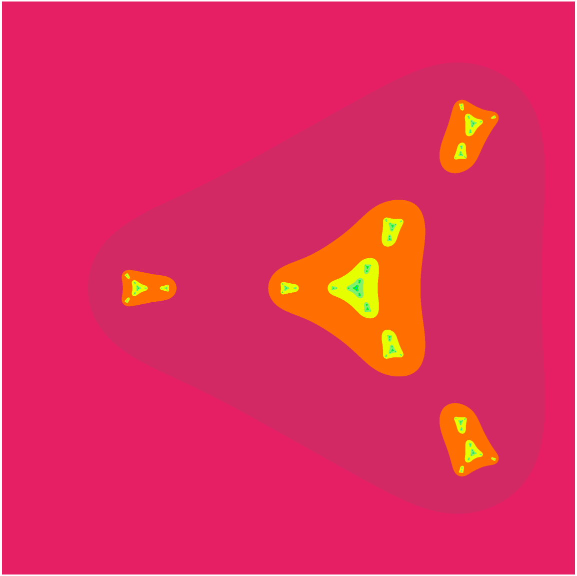
Ensemble de Julia rempli de $p(z) = z^2 - 1$ (zoom)



Ensemble de Julia rempli de $p(z) = z^2 - 1$ (zoom++)



Ensemble de Julia de $p(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 + 3z - 1$



Ensemble de Julia

Rappel. L'ensemble de Fatou est là où la famille $\{R^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est normale.

L'ensemble de Julia d'une fonction rationnelle R est le complément de l'ensemble de Fatou

$$J(R) := \mathbb{C} \setminus F(R).$$

Le plan complexe est donc diviser en région :

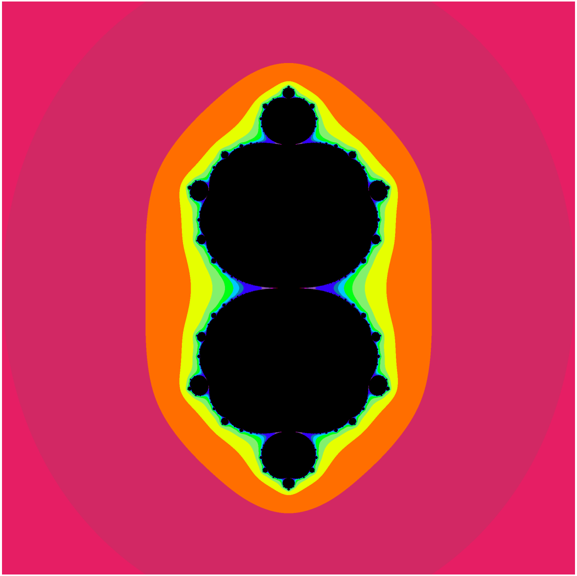
- $F(R)$ où la dynamique se comporte bien
- $J(R)$ où la dynamique est chaotique

Pourquoi l'algorithme fonctionne ?

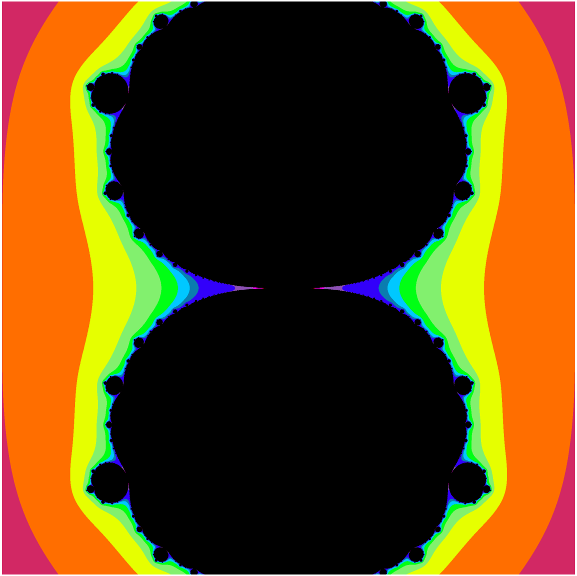
Une propriété de l'ensemble de Julia d'un polynôme P

- ∞ est toujours un point fixe attractif de P
- Soit F_∞ le bassin attractif de ∞
- On a
$$J(P) = \partial F_\infty(P).$$

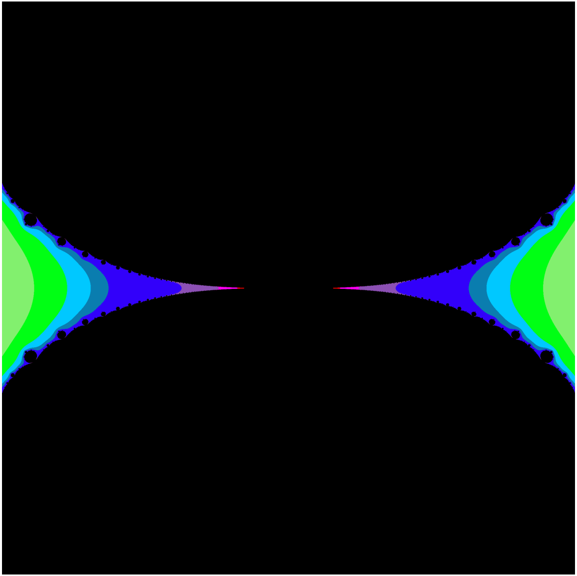
Ensemble de Julia rempli de $p(z) = z + z^3$



Ensemble de Julia rempli de $p(z) = z + z^3$ (zoom)



Ensemble de Julia rempli de $p(z) = z + z^3$ (zoom++)



Chaos dans l'ensemble de Julia

Pourquoi $J(R)$ se comporte-t-il si mal ?

- $J(R)$ est *invariant* : si $z_0 \in J(R)$, alors $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset J(R)$
- $J(R)$ est compact (sur la sphère Riemann)
- $J(R)$ est l'ensemble des points d'accumulation des orbites périodiques
- R possède une infinité d'orbites périodiques
- R possède au plus $2d - 2$ orbites périodiques non-répulsives
- $J(R)$ contient une infinité d'orbites périodiques répulsives !

Théorie du potentiel et ensemble de Julia

On peut montrer que l'ensemble de Julia est **ergodique**.

Fin (Trouver l'intrus)