Classification locale de la dynamique d'un point fixe parabolique

Jonathan Godin

sous la supervision de
Christiane Rousseau

Équivalence analytique

Étant donné deux germes $f(z) = z + \sum_n a_n z^n$ et $g(z) = z + \sum_n b_n z^n$ holomorphes en 0, existe-t-il un changement de coordonnées h qui conjugue f et g :
$$h \circ f \circ h^{-1} = g?$$
Dans un tel cas, alors on a $h \circ f^{\circ n} \circ h^{-1} = g^{\circ n}$. C'est donc une question de dynamique locale ; h envoie les orbites de f sur celles de g ! Le module d'Écalle-Voronin permet de répondre à cette question. On s'intéresse au cas où f et g sont *antiholomorphes*.

Antiholomorphie

Une *fonction antiholomorphe* est une solution de
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$
On note $\sigma(z) = \overline{z}$, qui est antiholomorphe.
Si $f(0) = 0$, alors
$$f(z) = \lambda\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + a_3\overline{z}^3 + \cdots$$
Le point fixe de f est *parabolique* si $|\lambda| = 1$, auquel cas, un changement de variable normalise f à
$$\tilde{f}(Z) = \overline{Z} + b_2\overline{Z}^2 + b_3\overline{Z}^3 + \cdots$$
Comme $f \circ f$ est holomorphe, la classification du cas holomorphe devrait nous guider !

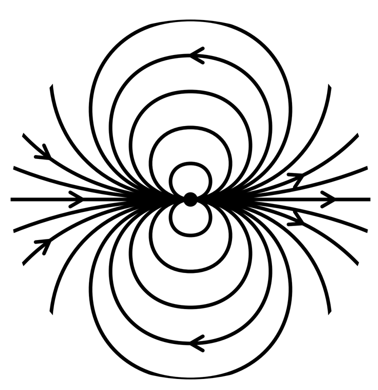
Forme canonique

Par changement de variable analytique, on se ramène au cas où f est de la forme
$$f(z) = \overline{z} + \frac{1}{2}\overline{z}^2 + b\overline{z}^3 + b_4\overline{z}^4 + \cdots, \quad (b \in \mathbb{R})$$
et $g := f \circ f$ de la forme
$$g(z) = z + z^2 + \left(2b + \frac{1}{2}\right) z^3 + c_4 z^4 + \cdots$$

Forme normale

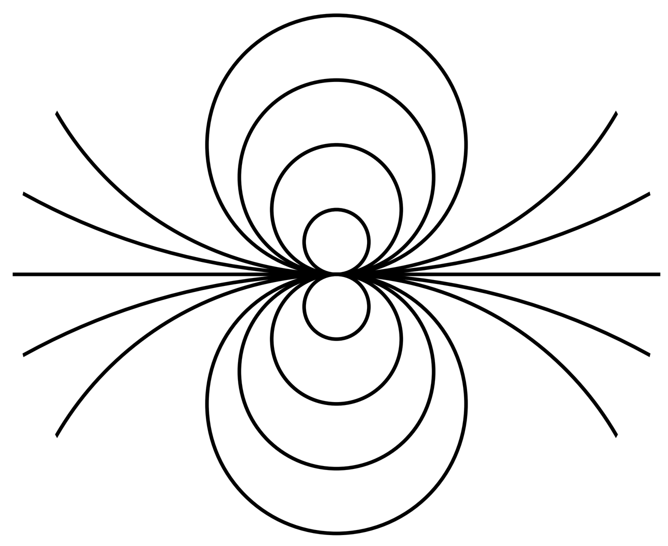
On considère le champ de vecteurs
$$\dot{z} = z^2.$$
Le temps-$\frac{1}{2}$ est un germe de la forme
$$v^{\frac{1}{2}}(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2^2}z^3 + \cdots$$
Les germes f et $v^{\frac{1}{2}} \circ \sigma$ sont-ils analytiquement conjugués ?
La forme normale introduit les coordonnées temps
$$t = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = -\frac{1}{z}.$$
On note f, g et $v^{\frac{1}{2}}$ par F, G et $T_{\frac{1}{2}}(t) = t + \frac{1}{2}$ dans ces coordonnées.

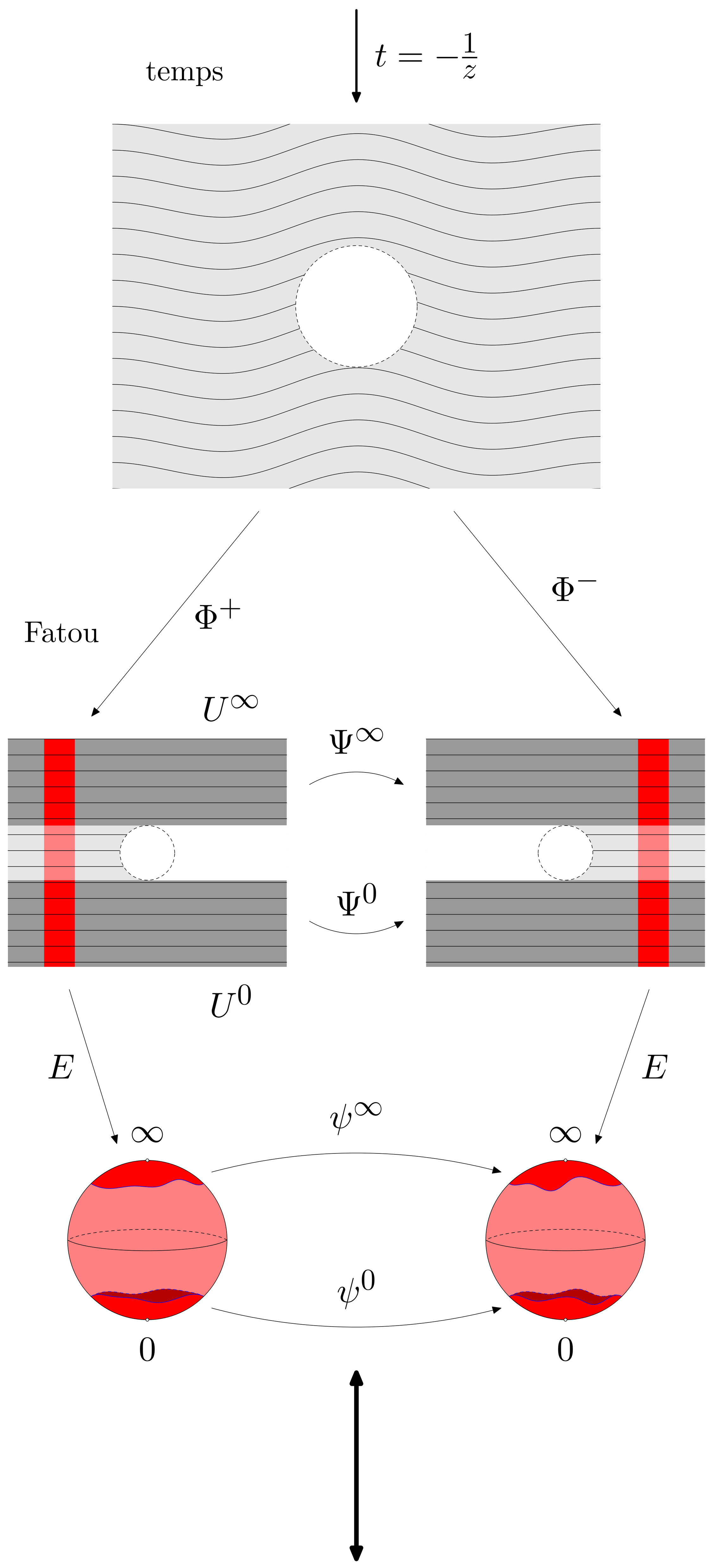
$\dot{z} = z^2$

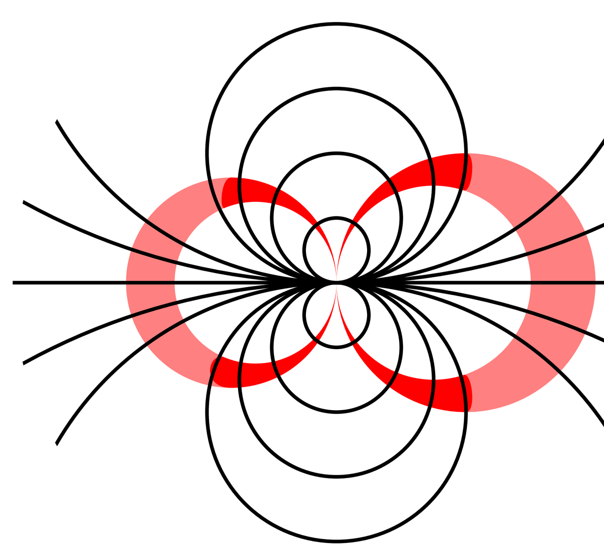


Obstruction formelle

La conjugaison par une série formelle
$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$$
préserve le coefficient b du germe f. L'ensemble
$$\mathcal{A}_{k,b} := \left\{ f(z) = \overline{z} + \overline{z}^2 + \left(2b + \frac{1}{2}\right)\overline{z}^3 + \cdots \right\}$$
est une classe d'équivalence sous la relation de conjugaison formelle.







Normalisation sectorielle

Théorème

- *(Existence)* Il existe des changements de coordonnées analytiques Φ^+ et Φ^- (coordonnées de Fatou) qui rectifient F à la forme normale $\sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$ sur des secteurs.
- *(Unicité)* Deux coordonnées de Fatou définies sur un même domaine suffisamment grand diffèrent par une translation réelle.

Fonctions de transition

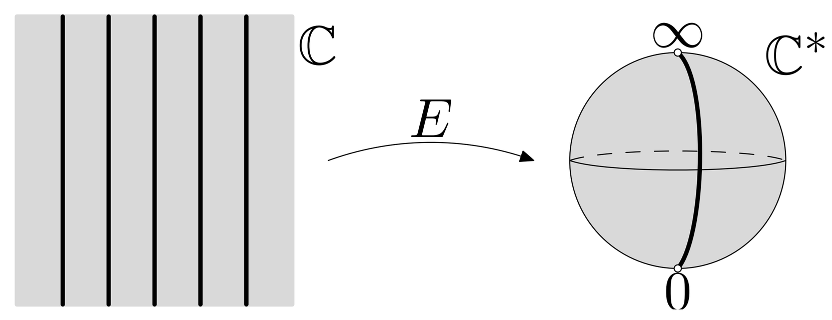
Les domaines de Φ^+ et Φ^- s'intersectent sur U, qui comporte deux composantes connexes U^0 et U^∞ contiennant respectivement des demi-plans $\{\Im z < R\}$ et $\{\Im z > R'\}$. On définit
$$\begin{cases} \Psi^0 = \Phi^- \circ (\Phi^+) & \text{sur } U^0\,; \\ \Psi^\infty = \Phi^- \circ (\Phi^+) & \text{sur } U^\infty. \end{cases}$$

Propriétés

1. À partir de $\Phi^\pm \circ G \circ (\Phi^\pm)^{-1} = T_1$, on trouve
$$\Psi \circ T_1 = T_1 \circ \Psi.$$
2. À partir de $\Phi^\pm \circ F \circ (\Phi^\pm)^{-1} = \sigma \circ T_{\frac{1}{2}}$, on a
$$\Psi^0 \circ \sigma \circ T_{\frac{1}{2}} = \sigma \circ T_{\frac{1}{2}} \circ \Psi^\infty.$$

Revêtement universel

L'espace de départ et d'arrivée de Ψ^0 et Ψ^∞ sont $\mathbb{C}$. Le revêtement universel $E \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ et la propriété 1. permettent de définir ψ^0 et ψ^∞ sur la sphère $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\} \cong \mathbb{C}^*$ par
$$\psi = E \circ \Psi \circ E^{-1}, \quad \text{où } E(t) = \exp(-2i\pi t).$$



Module de classification

Pour chaque germe f antiholomorphe, on lui associe un module $(b, [\psi^0, \psi^\infty])$ où

- b est la partie formelle, un nombre *réel* ;
- $[\psi^0, \psi^\infty]$ est la partie analytique, une classe d'équivalence correspondant aux différents choix de coordonnées de Fatou.

Classification

Résultat. Le module $(b, [\psi^0, \psi^\infty])$ est une classification complète. Plus précisément, on a

- *(Équivalence)* Deux germes antiholomorphes paraboliques sont anlytiquement équivalents si et seulement s'ils ont le même module ;
- *(Réalisation)* À chaque module est associé un germe antiholomorphe parabolique.

Conséquence et question

Racine antiholomorphe. Pour une fonction holomorphe g, une *racine carrée antiholomoprhe* est une fonction antiholomorphe f telle que $g = f \circ f$. La classification permet de déduire quel germe parabolique *holomorphe* g possède une racine antiholomorphe dans un voisinage de l'origine.

Divergence de la forme normale. Le module nous dit qu'un germe n'est jamais analytiquement conjugué à sa forme normale, en général. Pourquoi ? Pour mieux comprendre les obstructions, on introduit une famille de germes $f_\varepsilon(z)$ afin d'étudier les phénomènes de bifurcation.