

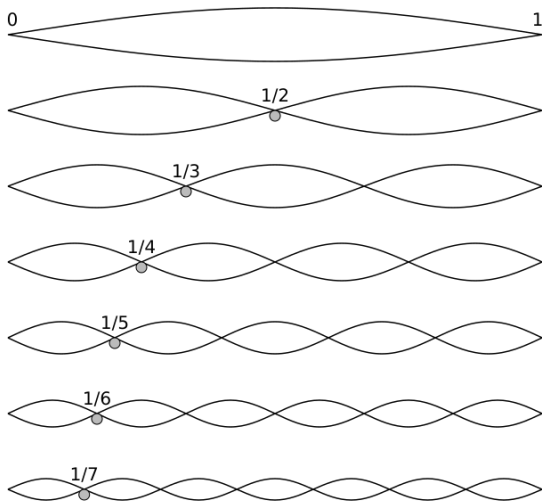
Mathématiques et technologie

.

Chapitre 10 : La fréquence de Nyquist et le pourquoi du 44 100 nombres à la seconde

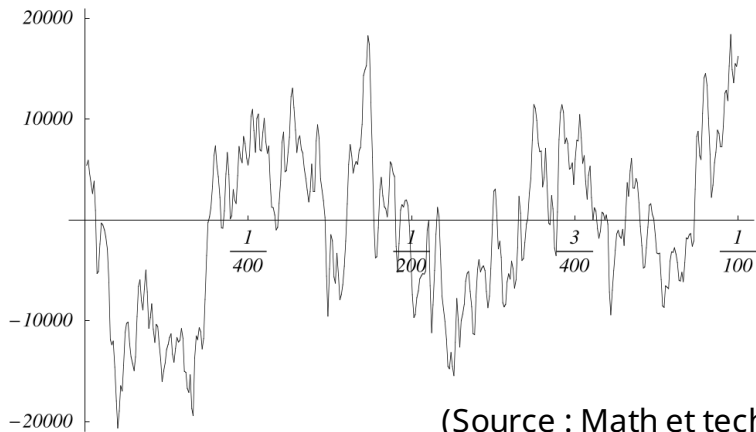
Jonathan Godin

Le son --- Une corde vibrante



(Wikipédia)

Le son --- une superposition d'ondes



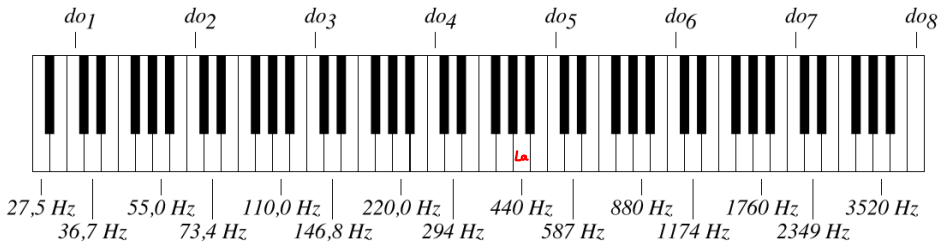
(Source : Math et techno)

Fig. 10.2. L'onde de pression pendant un centième de seconde de la dernière note de la Neuvième Symphonie de Beethoven. Sur un disque compact, chacune des 44 100 mesures à la seconde est ramenée à une valeur entière $\in [-2^{15}, 2^{15} - 1]$, la hauteur du palier. L'unité de l'axe horizontal est la seconde alors que celle du vertical est le palier ($2^{15} = 32\,768$).

Gamme musicale : "douze" notes

Octave : Do Ré Mi Fa Sol La Si

$$\frac{\text{fréquence } do_3}{\text{fréquence } do_2} = 2$$



(Source : math et techno)

Fréquence du La au centre : 440Hz

Prochaine note Si : $440 \times \sqrt[12]{2}$ Hz

La dernière note de la dernière symphonie de Beethoven

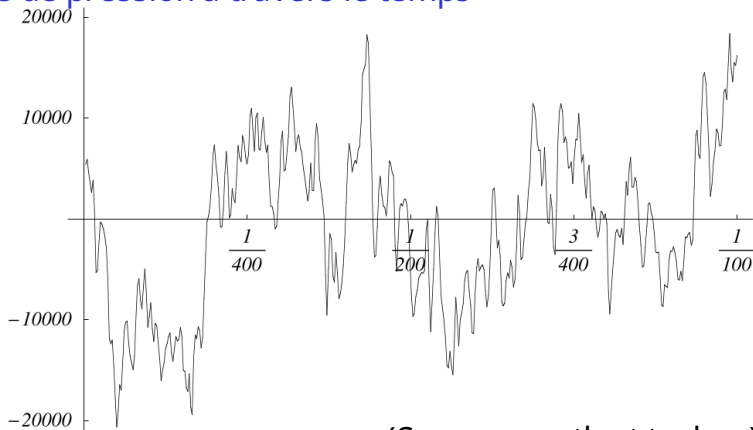
The image displays the final page of the musical score for Beethoven's Ninth Symphony, specifically the last measures of the movement. The score is written for a large orchestra and includes the following instruments: Piccolo (Picc.), Flute (Fl.), Oboe (Ob.), Clarinet in A (Cl. (A)), Bassoon (Fg.), Contrabassoon (Cfb.), Cor Anglais (Cor. (D)), Trumpet (Tr. (D)), Trombone (Tbni.), Timpani (Timp.), Trombone (Trgb.), Cymbals (Cin.), Grand Timpani (Gr.T.), Violin I (VL), Violin II (Vln.), Viola (Vcl.), and Cello (Cb.). The score shows the final notes of each instrument, with many instruments ending on a whole note G4 (the note 'Ré' in French). The dynamic markings are *f* (forte) and *ff* (fortissimo). The key signature is one sharp (F#) and the time signature is common time (C).

Particularité :
Tous les
instruments
jouent un
Ré comme
dernière
note

(Source :
math et
techno)

Fig. 10.4. La dernière page de la partition de la Neuvième Symphonie

Onde de pression à travers le temps



(Source : math et techno)

Fig. 10.2. L'onde de pression pendant un centième de seconde de la dernière note de la Neuvième Symphonie de Beethoven. Sur un disque compact, chacune des 44 100 mesures à la seconde est ramenée à une valeur entière $\in [-2^{15}, 2^{15} - 1]$, la hauteur du palier. L'unité de l'axe horizontal est la seconde alors que celle du vertical est le palier ($2^{15} = 32\,768$).

Onde de pression à travers les fréquences

Si tous les instruments jouent un Ré,
pourquoi voit-on d'autres notes ?

(Source : math et techno)

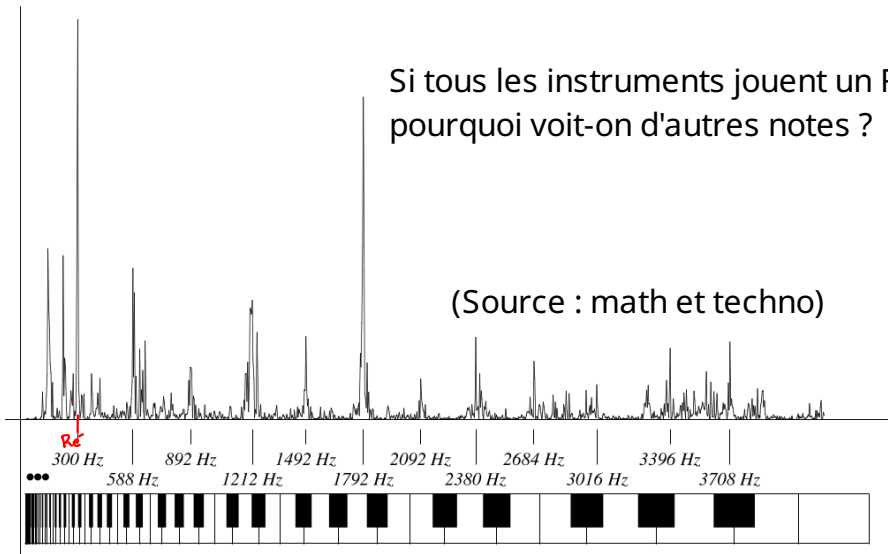


Fig. 10.7. La fonction $e_k = k(C_k^2 + S_k^2)$ en fonction de la fréquence $(4k)$ Hz

Lorsqu'une corde vibre, elle a une fréquence fondamentale (plus petite fréquence qui est solution de l'équation des ondes)

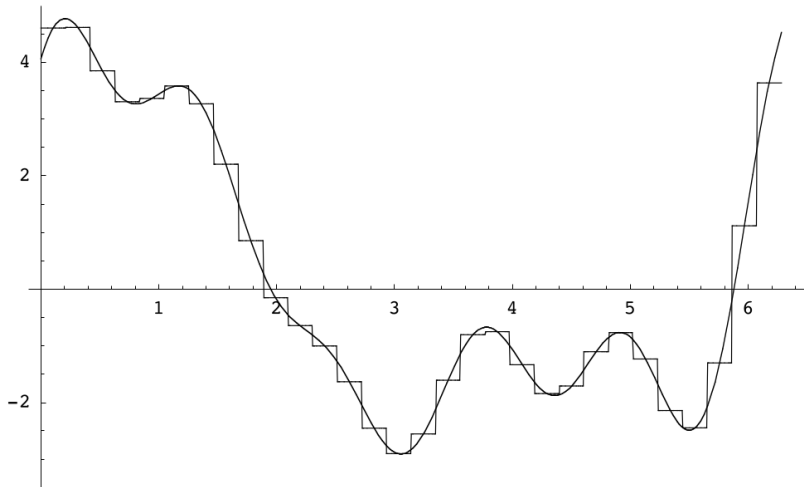
$$\text{Éq. des ondes : } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\text{Solutions : } f_k(x, t) = A \sin \frac{\pi k x}{L} \cdot \sin(\omega_k t + \alpha) \text{ où } \omega_k = k \omega_1$$

Tous les multiples naturels de cette fréquences sont aussi des solutions. On les appelle les harmoniques.

Mais 3 x fréquence d'un Ré n'est pas un Ré, c'est un La !

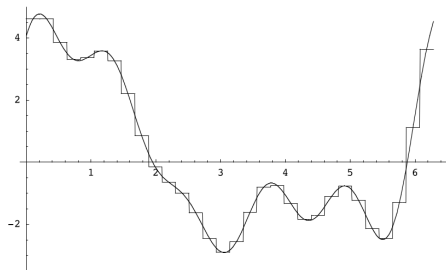
Comment numériser un son (ou de la musique) ?



(Source : math et techno)

Fig. 10.1. La fonction « onde de pression » et une fonction « escalier » qui l'approche

Comment numériser un son ?



La courbe f représente l'onde de pression (le son).

On divise l'intervalle du temps en petits intervalles de longueur 1.

Ensuite, sur chaque intervalle de longueur 1, on subdivise davantage en intervalles de longueur $1/(44\,100)$. Sur chacun d'eux, on évalue $f(t)$ en un point (disons l'extrémité droite).

Ces nombres permettent de reconstruire l'onde de façon assez fidèle, pour l'oreille humaine !

Pourquoi ça marche ? Et pourquoi 44 100 ?

La première question trouve sa réponse dans les séries de Fourier :

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{c_k}_{\text{Amplitude}} \cos 2\pi kx + \underbrace{s_k}_{\text{et déphasage}} \sin 2\pi kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

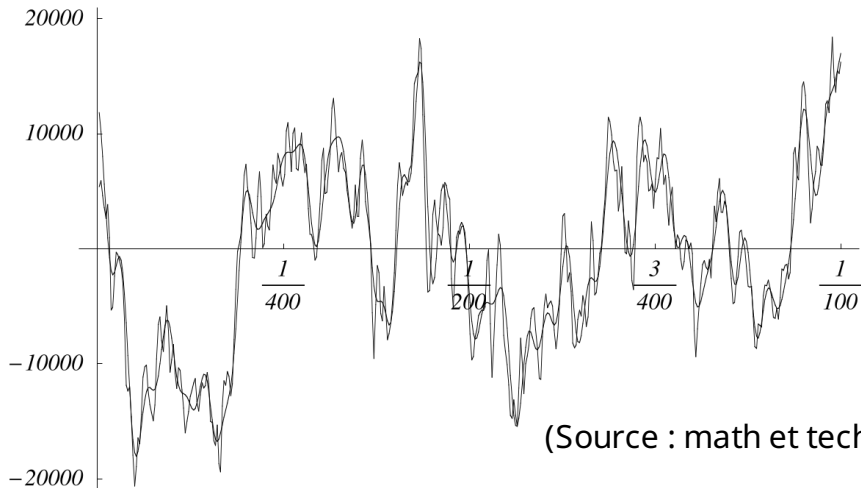
pour la fréquence k

Si on ignore les fréquences en-deçà de 20 et au-delà de 20 000, alors

$$f(t) = \sum_{k=20}^{20000} (c_k \cos 2\pi kt + s_k \sin 2\pi kt)$$

Pourquoi ignorer ces fréquences ? La plupart des humains ne les entendent pas !

Est-ce une bonne approximale ?



(Source : math et techno)

Approximation
avec 800 termes

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{800} (C_k \cos 2\pi kt + S_k \sin 2\pi kt)$$