

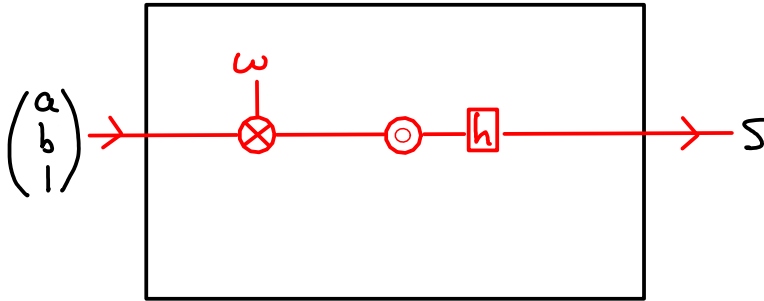
Mathématiques et technologie

Exercices

Réseaux de neurones

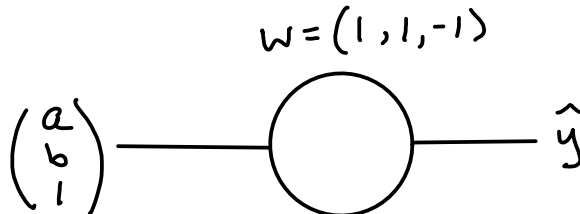
Exercice 1. On considère un perceptron P qui a une sortie $\hat{y}(x) \in \{0, 1\}$ pour une entrée $x \in \mathbb{R}^2$. La *frontière de décision* (ou graphique de classification) est la représentation visuelle des régions $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{y}(x) = 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{y}(x) = 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des réseaux suivants, tracer la frontière de décision. Indiquer également les données d'entraînement. Les neurones auront toutes le fonctionnement suivant : un neurone de poids $w = (p_1, p_2, p_3)$ et d'entrée $\vec{x} = (a, b, 1)^T$ donne la sortie $s = h(w\vec{x})$, où h est la fonction d'activation

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

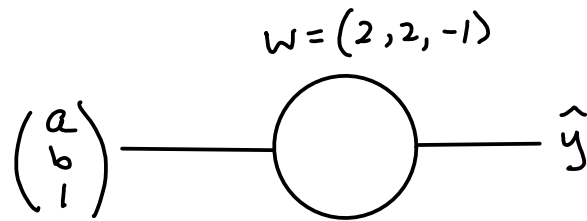


(Le 1 dans le vecteur d'entrée $(a, b, 1)$ est pour le biais.)

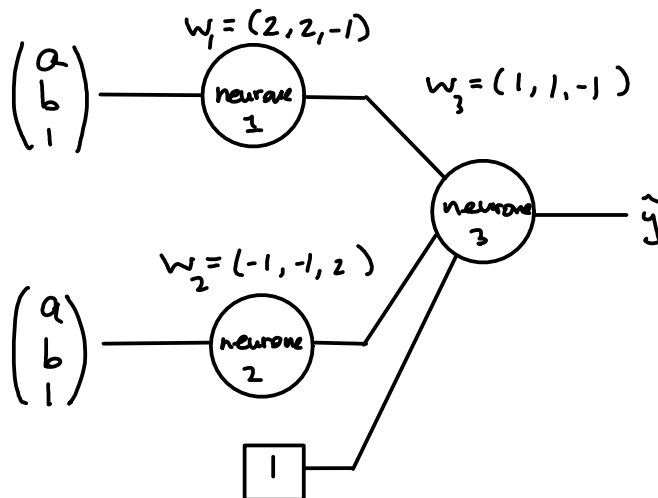
- a) Les données d'entraînement sont $((0, 0), 0)$, $((1, 0), 1)$, $((0, 1), 1)$, $((1, 1), 1)$. Le réseau est donné par le schéma



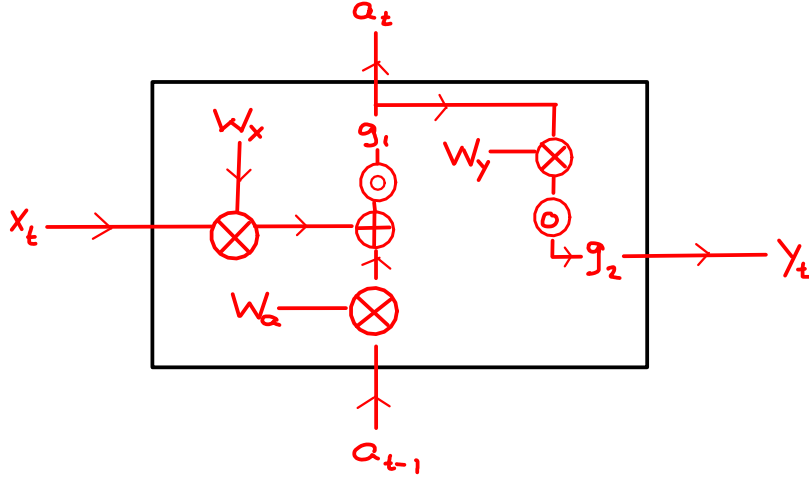
- b) Les données d'entraînement sont $((0,0),0)$, $((1,0),0)$, $((0,1),0)$, $((1,1),1)$. Le réseau est donné par le schéma



- c) Les données d'entraînement sont $((0,0),0)$, $((1,0),1)$, $((0,1),1)$, $((1,1),0)$. Le réseau est donné par le schéma



Exercice 2. On considère le neurone décrit par le schéma suivant



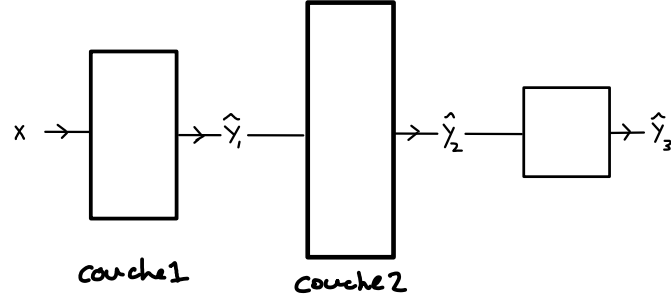
On considère que x_t est un vecteur colonne de taille $n \times 1$, y_t est un scalaire et que a_{t-1} et a_t sont des vecteurs colonnes de taille $m \times 1$. Les matrices de poids W_x , W_y et W_a ont des tailles qui font en sorte que les opérations sont possibles. Les fonctions d'activation $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions connues. On utilise la convention que si $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)^T$ est un vecteur colonne, alors g s'applique sur $\vec{v}$ composante par composante, c'est-à-dire

$$g(\vec{v}) = \begin{pmatrix} g(v_1) \\ \vdots \\ g(v_k) \end{pmatrix}.$$

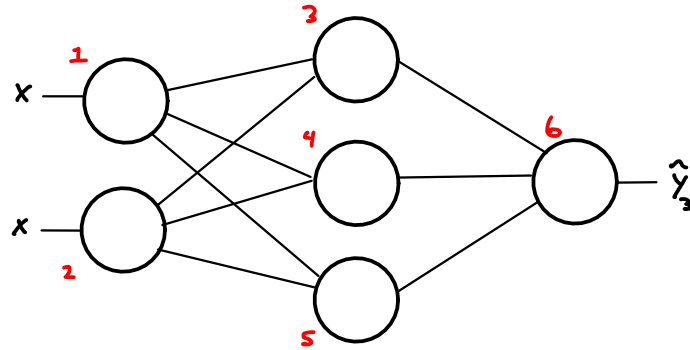
- Déterminer les dimensions des matrices de poids.
- Donner une équation pour y_t et pour a_t .
- On note $W_x = (w_{x,ij})_{ij}$, $W_y = (w_{y,ij})_{ij}$ et $W_a = (w_{a,ij})_{ij}$. On pose $\mathcal{L}(y_t, \hat{y}_t) = (y_t - \hat{y}_t)^2$. Calculer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{x,11}}$.

Exercice 3. Un neurone prend x comme entrée et donne la sortie $y = x + f(wx + b_1) + b_2$, où w est un poids et b_1, b_2 sont des biais. Dessiner un schéma qui représente ce neurone.

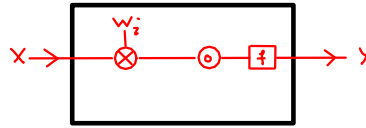
Exercice 4. On considère le réseau de neurones à trois couches



que l'on peut écrire explicitement comme



et où le i -ième neurone est de la forme



Les poids sont des vecteurs lignes dont les tailles sont données par : w_1, w_2 : taille 1 (scalaire); w_3, w_4, w_5 : taille 2; w_6 : taille 3.

On considère que la fonction d'activation $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est connue et dérivable.

- Donner une formule pour $\hat{y}_t$ avec $t \in \{1, 2, 3\}$, où l'entrée x est un scalaire.
- La fonction d'erreur (ou fonction de perte) est $\mathcal{L}(y, \hat{y}) = (y - \hat{y}_3)^2$. On écrit

$$w_i = (w_{i1} \quad w_{i2}) \quad i \in \{3, 4, 5\},$$

$$w_6 = (w_{61} \quad w_{62} \quad w_{63}).$$

Vérifier que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} = 2(y - \hat{y}_3)f'(w_6\hat{y}_2) \left[f'(w_3\hat{y}_1)w_{31}w_{61} + f'(w_4\hat{y}_1)w_{41}w_{62} + f'(w_5\hat{y}_1)w_{51}w_{63} \right] f'(w_1x)x.$$