

Mat 2450 Ch 10

$$1. \omega_{d_{n+5}} = (2^{1/2})^{12n+3} \cdot 440 = 2^{n+1/4} \cdot 440 = 440 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^n.$$

ω_{d_n}	1	2	3	4	5	6	7	8
	32.7	65.4	130.8	261.6	523.3	1046.5	2093.0	4186.0

$$2.a) M_q \int_0^1 \cos(2\pi mt) \sin(2\pi nt) dt = 0$$

$$\sin(2\pi mt) \cos(2\pi nt) = \frac{1}{2} (\sin(2\pi t(m+n)) + \sin(2\pi t(m-n)))$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2\pi t(m+n) dt &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi(m+n)} \left[-\cos(2\pi t(m+n)) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi(m+n)} \cdot (-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2\pi t(m-n) dt = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi(m-n)} \cdot (-1 + 1) = 0.$$

$$2.b) \overset{Mc.}{2} \int_0^1 \sin(2\pi mt) \sin(2\pi nt) dt = \delta_{m,n} - \delta_{m,-n}.$$

$$2 \sin(2\pi mt) \sin(2\pi nt) = \cos(2\pi t(m-n)) - \cos(2\pi t(m+n)).$$

$$2 \int_0^1 \sin(2\pi mt) \sin(2\pi nt) dt = 2 \int_0^1 \cos 2\pi t(m-n) - \cos(2\pi t(m+n)) dt$$

$$\text{Si } m=n, \quad = 2 \int_0^1 1 - \cos 2\pi t(2n) dt = 1$$

$$m=-n \quad = 2 \int_0^1 \cos 2\pi t(-2n) - 1 dt = 1$$

$$\text{Sinon} \quad = 2 \left(\frac{1}{2\pi(m-n)} \left[\sin(2\pi t(m-n)) \right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2\pi(m+n)} \left[\sin(2\pi t(m+n)) \right]_{t=0}^{t=1} \right)$$

$$= 2(0 - 0) = 0$$

3a. Montrer que:

$\forall k \in \mathbb{N}, c_k, s_k \in \mathbb{R}$

alors $\exists t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$c_k \cos(2\pi \cdot kt) + s_k \sin(2\pi \cdot kt) = \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos(2\pi \cdot k(t + t_0))$$

Dm// On commence par remarquer que

$\forall c_k, s_k \in \mathbb{R} \exists \theta \in [0, 2\pi)$

tel que $\left. \begin{aligned} c_k &= \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos \theta, \\ s_k &= \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \sin \theta \end{aligned} \right\}$ les « coordonnées polaires »

typiquement, on dit (r) pour "radius".

En particulier, $\theta = \arctan(s_k, c_k) \in [0, 2\pi)$.

On voudrait alors montrer qu'il existe t_0 tq.

$$\underbrace{\sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos \theta}_{c_k} \cos(2\pi \cdot kt) + \underbrace{\sqrt{c_k^2 + s_k^2} \sin \theta}_{s_k} \sin(2\pi \cdot kt) = \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos(2\pi \cdot k(t + t_0))$$

(On va négliger le coefficient $\sqrt{c_k^2 + s_k^2}$ pour la suite)

→ On utilise l'identité $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$.

$$\cos \theta \cos(2\pi \cdot kt) + \sin \theta \sin(2\pi \cdot kt) = \cos(\theta - 2\pi \cdot kt)$$

$$\cos(A - B) = \cos(B - A) \rightarrow = \cos(2\pi \cdot kt - \theta)$$

$\cos$ est périodique, alors aucun effet

$$= \cos(2\pi \cdot kt - \theta + 2\pi \cdot k) = \cos\left(2\pi k\left(t - \frac{\theta}{2\pi k} + 1\right)\right)$$

$\theta \in [0, 2\pi)$ alors $-\frac{\theta}{2\pi k} + 1 \in [0, 1]$.

On met $t_0 = 1 - \frac{\theta}{2\pi k}$ pour conclure.

Nota Bene

- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$.
- $\cos(A - B) = \cos(B - A)$
- J'écris $2\pi \cdot kt$, mais la multiplication est bien scalaire ($2\pi kt$)

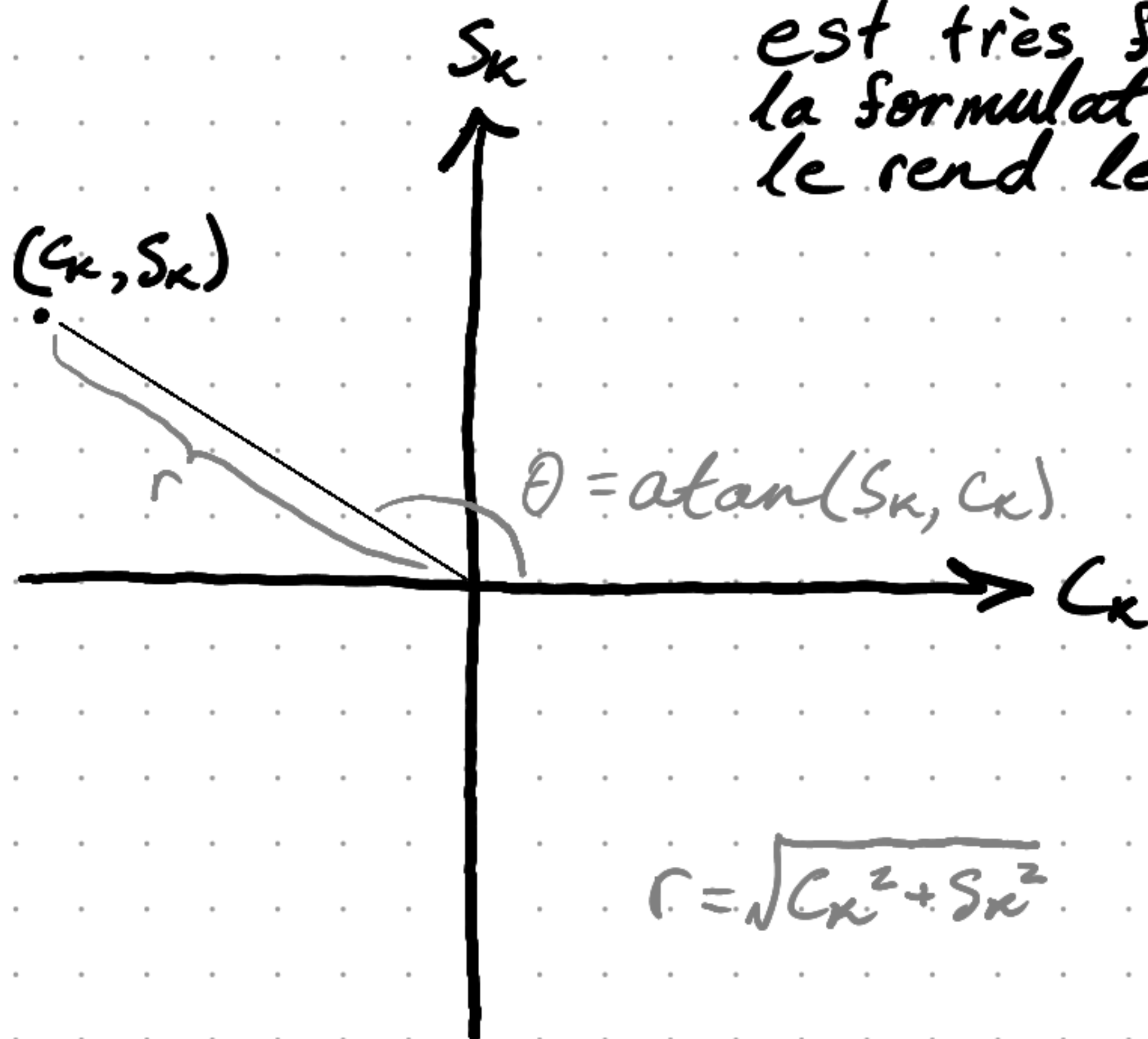
3b. Si $f(t) = r \cos(2\pi k(t+t_0))$ alors

$$r \cos(2\pi k(t+t_0)) = r \cos(2\pi kt) \cos(2\pi kt_0) + r \sin(2\pi kt) \sin(2\pi kt_0)$$

$$C_k = r \cdot \cos(2\pi kt_0)$$

$$S_k = r \cdot \sin(2\pi kt_0)$$

→ Le résultat de cet exercice est très fondamentale, mais la formulation de l'énoncé (3a) le rend lent à résoudre...



4a. $440 \cdot 2^{39/12}$ est sur le piano. On entend jusqu'à 20kHz

$$12 \cdot \log_2(20000/440) = 66.076$$

→ on peut rajouter 66 clés, ou 8 octaves.

4b. On entend jusqu'à 20 Hz. On a $440 \cdot 2^{-48/12}$ sur le piano.

$$\hookrightarrow 12 \cdot \log_2(20/440) = -53; \text{ alors, 5 clés.}$$

4c. $12 \cdot \log_2(45000/440).$

4d. 90 kHz

8a) $E2 (M:2)$ b) #1

14. $N' = |N - k \cdot 2N_{\max}|$, où k est le seul entier

$$\text{t.q. } |N - k \cdot 2N_{\max}| \leq N_{\max}$$

$$6. f(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t) - \frac{1}{3} \sin(6\pi t) + \frac{1}{600} \sin(400\pi t)$$

⊕ Une fonction f est périodique s'il existe $T > 0$

$$\text{t.q. } f(t+T) = f(t) \quad \forall t.$$

Après, la plus petite valeur T qui satisfait cette condition est la période de f .

6a) Quelle est la période de f ?

$\sin(1 \cdot 2\pi t)$ a une période de $\frac{1}{1} = 1$

$\sin(3 \cdot 2\pi t)$ a une période de $\frac{1}{3}$

$\sin(200 \cdot 2\pi t)$ a une période de $\frac{1}{200}$

On sait en général que

$$T \leq \text{ppcm}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{200}) = 1.$$

On "observe" que T doit être au moins 1.

Alors la période de f est 1.

$$f(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t) - \frac{1}{3} \sin(6\pi t) + \frac{1}{600} \sin(400\pi t)$$

1) Quels sont ses coefficients de Fourier?
(selon la définition du texte de ces coeffs.)

En utilisant les identités (10.4) et (10.6), → Dont Greg est mécontent

$$\begin{aligned} C_k &= 2 \int_0^1 \cos(2\pi kt) \left(\frac{1}{2} \sin(2\pi t) - \frac{1}{3} \sin(6\pi t) + \frac{1}{600} \sin(400\pi t) \right) dt \\ &= \frac{2}{2} \int_0^1 \cos(2\pi kt) \sin(2\pi t) dt - \frac{2}{3} \int_0^1 \cos(2\pi kt) \sin(6\pi t) dt \\ &\quad + \frac{2}{600} \int_0^1 \cos(2\pi kt) \sin(400\pi t) dt \end{aligned}$$

$$(10.4) \quad = \frac{2}{2} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{2}{600} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} S_k &= 2 \int_0^1 \sin(2\pi kt) \left(\frac{1}{2} \sin(2\pi t) - \frac{1}{3} \sin(6\pi t) + \frac{1}{600} \sin(400\pi t) \right) dt \\ &= \frac{2}{2} \int_0^1 \sin(2\pi kt) \sin(2\pi t) dt - \frac{2}{3} \int_0^1 \sin(2\pi kt) \sin(6\pi t) dt \\ &\quad + \frac{2}{600} \int_0^1 \sin(2\pi kt) \sin(400\pi t) dt. \end{aligned}$$

(10.5)

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k=1 \\ -\frac{1}{3} & \text{si } k=3 \\ \frac{1}{600} & \text{si } k=200 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. Soit $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

a) Trouver S_k, C_k

On commence par montrer que $C_k = 0 \forall k$.

$$C_k = \int_0^1 \cos(2\pi kt) f(t) dt$$

$$= 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi kt) (1) dt + 2 \int_{1/2}^1 \cos(2\pi kt) (-1) dt$$

$$= \frac{2}{2\pi k} \left[\sin(2\pi kt) \right]_{t=0}^{t=1/2} - \frac{2}{2\pi k} \left[\sin(2\pi kt) \right]_{t=1/2}^{t=1}$$

$$= \frac{2}{\pi k} \left[\left(\sin(2\pi k \cdot \frac{1}{2}) - \sin(2\pi k \cdot 0) \right) - \left(\sin(2\pi k \cdot 1) - \sin(2\pi k \cdot \frac{1}{2}) \right) \right]$$

Remarquons $\sin(\pi k) = \sin(2\pi k) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\rightarrow \frac{2}{\pi k} (0 - 0 - (0 - 0)) = 0.$$

alors $C_k = 0 \forall k \in \mathbb{N} \leftarrow \begin{cases} \text{ou } k \in \mathbb{Z} ; \text{l'auteur utilise } \mathbb{N} \\ \text{alors que Greg préfère } \mathbb{Z} \end{cases}$

MAT2450

7a. cont.

$$\begin{aligned} S_k &= \int_0^1 \sin(2\pi k t) \cdot f(t) dt \\ &= 2 \int_0^{1/2} \sin(2\pi k t) \cdot (1) dt + 2 \int_{1/2}^1 \sin(2\pi k t) \cdot (-1) dt \\ &= \frac{2}{2\pi k} \left[-\cos(2\pi k t) \right]_{t=0}^{t=1/2} - \frac{2}{2\pi k} \left[-\cos(2\pi k t) \right]_{t=1/2}^{t=1} \\ &= \frac{2}{2\pi k} \left[(\cos(2\pi k \cdot 0) - \cos(2\pi k \cdot \frac{1}{2})) + (\cos(2\pi k \cdot 1) - \cos(2\pi k \cdot \frac{1}{2})) \right] \\ &= \frac{2}{2\pi k} (1 - \cos(\pi k) + 1 - \cos(\pi k)) \end{aligned}$$

Remarquons : $\cos(\pi k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

b) Consulter le fichier ipynb.

 <https://colab.research.google.com/drive/10iFVwm70K5bOgjkIFb-uoQJu98jSPS-z?usp=sharing>



<https://colab.research.google.com/drive/10iFVwm70K5bOgjkIFb-uoQJu98jSPS-z?usp=sharing>

MAT2450 Ch10.5

$$2^{7/12} \approx 1.498$$

5. Construire le tempérament Pythagore

Greg prolonge l'énoncé pour rajouter une motivation:

Pour le tempérament justifié (normal), on a

$$f(n) = 440 \cdot 2^{n/12} \rightarrow \forall n \quad f(n+1)/f(n) = 2^{1/12}$$

Ce qui veut dire qu'il n'y a aucun pair (n_1, n_2)

$$\text{tel que } f(n_1)/f(n_2) = \frac{3}{2}.$$

La gamme Pythagore résout ce problème

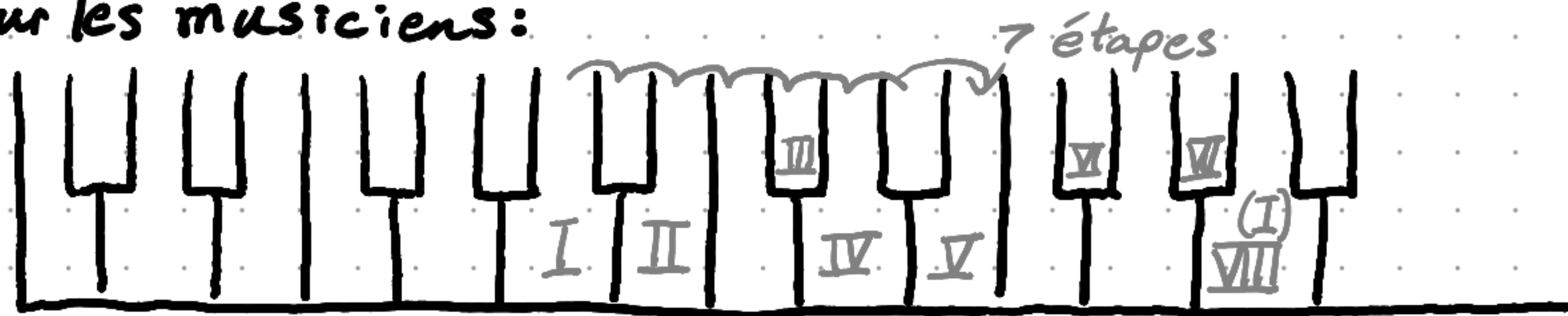
Principe: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a que

$$\text{i) } f_{\text{pyth}}(n+7)/f_{\text{pyth}}(n) = \frac{3}{2}$$

$$\text{ii) } 2 \cdot f_{\text{pyth}}(n) = f_{\text{pyth}}(n+12)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}.$$

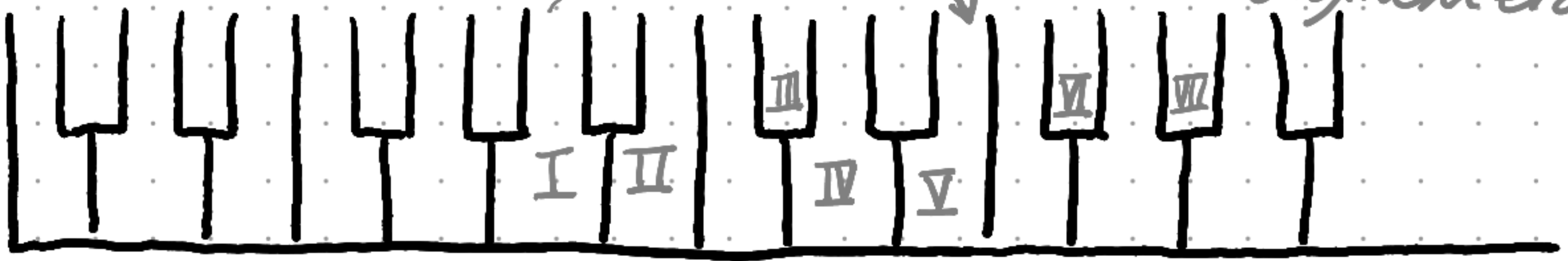
Pour les musiciens:



Passer de I $\rightarrow$ V correspond à monter 7 d'és

$$f_{\text{pyth}}(7) = 440 \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot 2^0$$

1 saut de 7 $\rightarrow (\frac{3}{2})^1$; ce chiffre augmentera.



$$f_{\text{pyth}}(7) = 440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1$$

Généralisation

On va avancer 7 clés à la fois. Puis comme 7 est un élément générateur du groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, On peut dénombrer les clés

$$f(2) = f(14)/2$$

$$f_{\text{pyth}}(14) = 440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow f_{\text{pyth}}(2) = 440 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2^{-1}$$

$$\rightarrow f_{\text{pyth}}(9) = 440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 2^{-1}$$

$$f(4) = f(16)/2$$

$$\rightarrow f_{\text{pyth}}(16) = 440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^{-1} \rightarrow f_{\text{pyth}}(4) = 440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^{-2}$$

Le reste:

n	$n \bmod 12$	f_{pyth}
11	11	$440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot 2^{-2}$
18	6	$440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot 2^{-3}$
13	1	$440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot 2^{-4}$
8	8	$440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot 2^{-4}$
15	3	$440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 \cdot 2^{-5}$
10	10	$440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot 2^{-5}$
17	5	$440 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{11} \cdot 2^{-6}$

9 a. { i) 77Hz (77, 154, 231, 308)
 faciles { ii) 116Hz (116, 232, 348, 464)
 { iii) 195Hz (195, 390, 585, 780)

iv) 700Hz?

ex. Si les deux sont séparées par un octave.

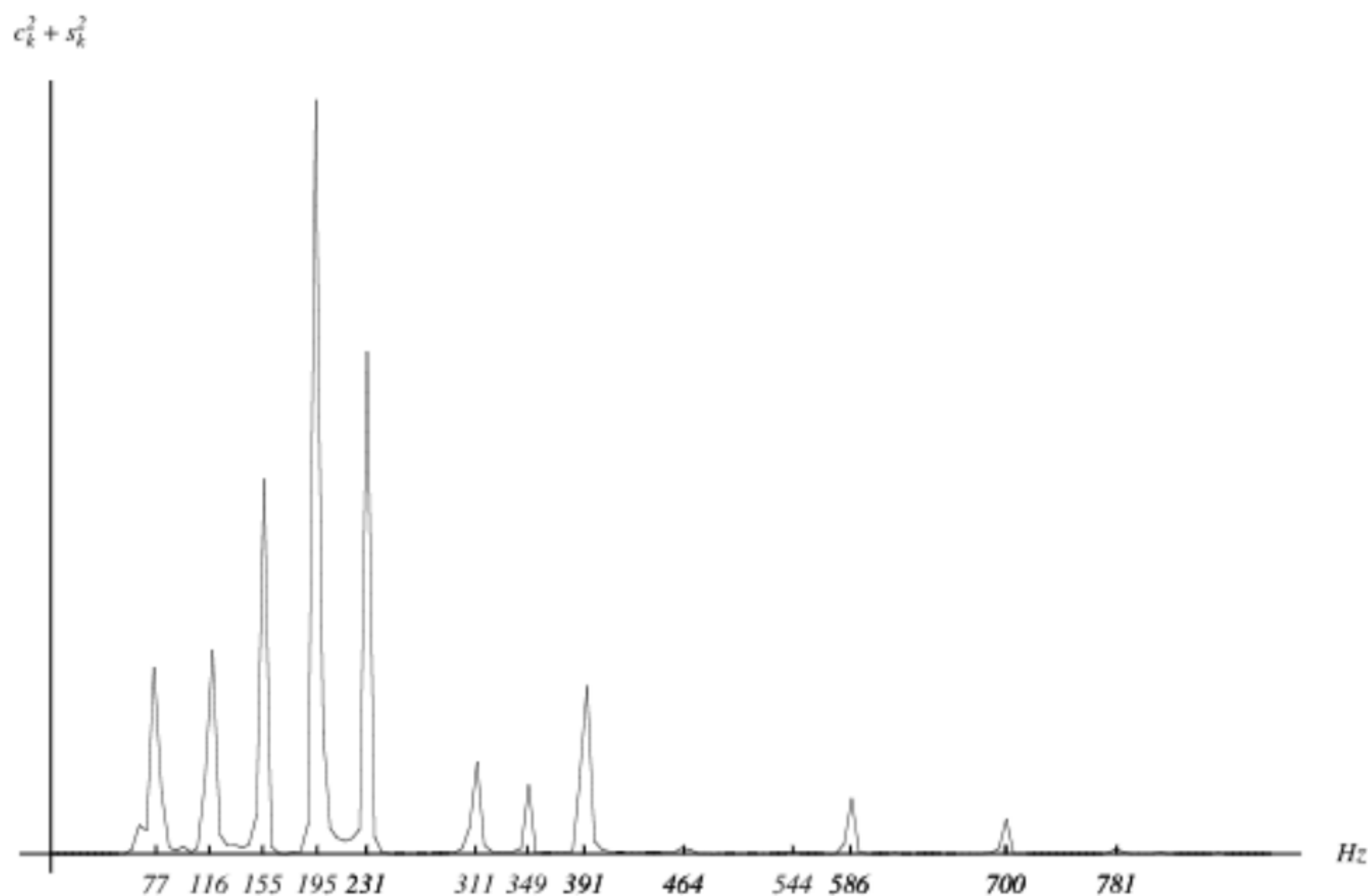


Fig. 10.13. Spectre du dernier accord du premier impromptu, D. 946, de Schubert. Les fréquences des maxima locaux sont données (voir l'exercice 9).

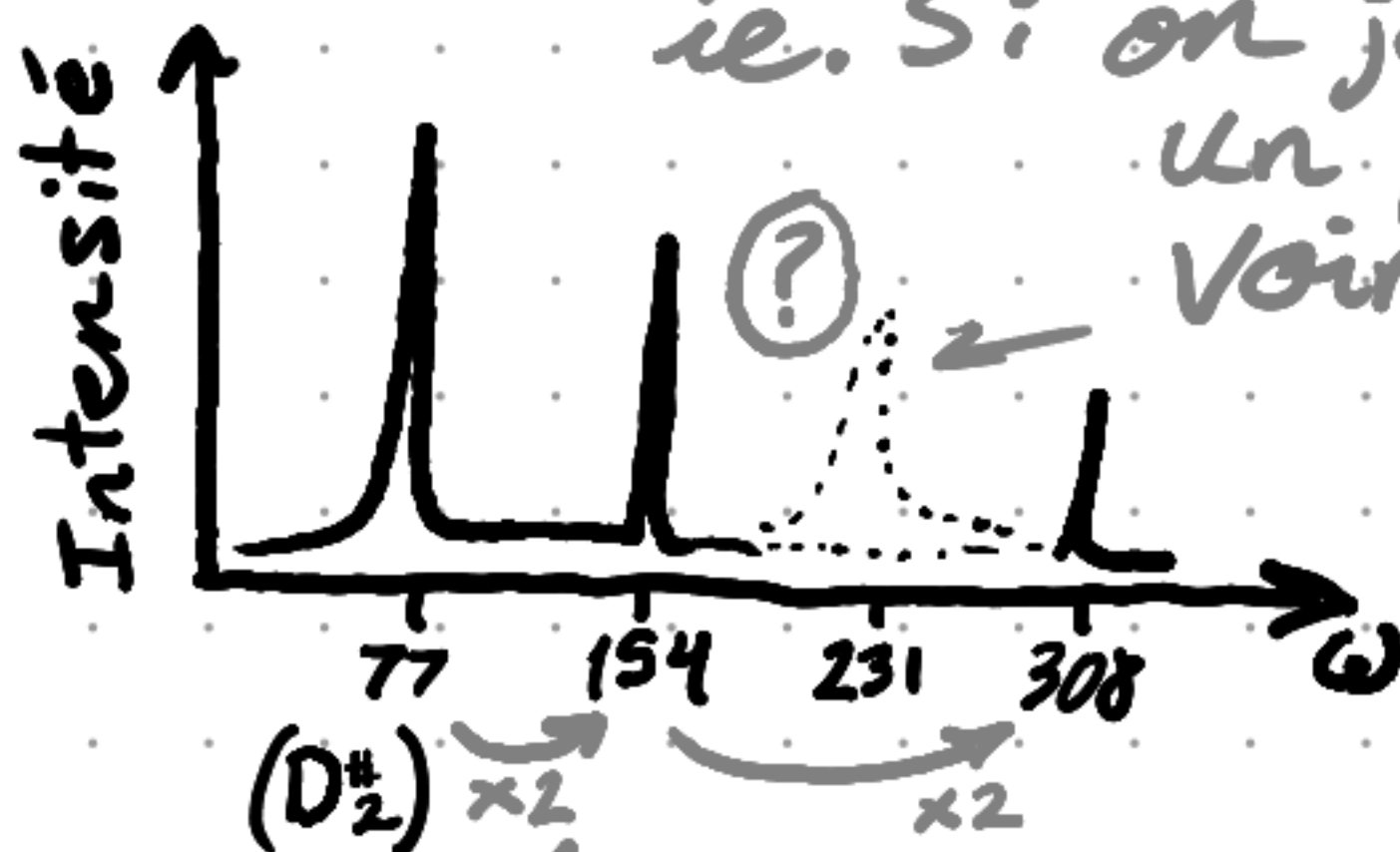
Une suivi de notre discussion
 pendant la séance se trouve sur
 la page suivante

9. Discussion pendant la séance

Est-ce qu'une note produit toutes les harmoniques sur le spectrographe?

Ou juste celles qui ont une fréquence qui est une puissance de 2 de la fondamentale?

ie. Si on joue une note à 77Hz sur un piano, est-ce qu'on devrait voir une pique à 231Hz ($= 3 \cdot 77\text{Hz}$)?



Réponse: Toutes les harmoniques.

(La réponse initiale de Greg)

→ Voir pages 310-311 $154 = 2 \cdot 77$

→ On devrait voir une pique à 231Hz.

Soit ω la fréquence. Deux faits:

1) Si on dit $\omega_{D_2^\#} = 77\text{Hz}$, alors on a $\omega_{D_3^\#} = 154\text{Hz}$

Ceci est la définition d'un octave.

Généralisation: $\omega_{D_n^\#} = 77 \cdot 2^{n-2}$

mais

2) Toute fréquence harmonique sera produite (avec une intensité variable) avec la note fondamentale.

Harmoniques de $\omega_{D_2^\#}$: $77, 154, \underline{231}, 308, 385, \dots$

Ce qui m'a trompé dans la discussion:

Les harmoniques des "ordres 2^e-1^e" ($77 \cdot 2, 77 \cdot 4, 77 \cdot 8, \dots$) correspondent à d'autres notes sur le piano, mais ce n'est pas vrai pour les harmoniques en général.

10 a). $172 \text{ Hz} = F_3 \quad (f_{a(3)})$

b) $|\hat{f}(528)| \gg |\hat{f}(350)|$ et $|\hat{f}(877)| \gg |\hat{f}(700)|$

Typiquement l'intensité décroît avec la fréquence, ce qui n'est pas le cas ici

10.5.15

Théorème 10.5 (d'échantillonnage) Soit f une fonction dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-\sigma, \sigma]$ pour un certain σ fixé. Soit Δ choisi tel que $\Delta \leq \frac{1}{2\sigma}$. Si $\mathcal{F}$ est continûment différentiable, alors la série

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - n\Delta}{\Delta} \right) \quad (10.18)$$

converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. (La fonction sinc est donnée en (10.17).)

d. La transformée de Fourier pour $(f(t) = \cos(2\pi\omega_0 t), \omega_0 = 5.5)$ n'est pas continûment dérivable.

Il suffit de la limiter à un interval borné.

$$\text{ex. } f(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t \omega_0) & \text{si } |t| < 10^6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite $\mathcal{F}(\omega)$ sera une fonction sinc, mais ressemblera à une seule pique sur $\omega = 5.5$

