

Mat 2450 Ch 10

$$1. \omega_{dn+5} = (2^{1/2})^{12n+3} \cdot 440 = 2^{n+1/4} \cdot 440 = 440 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^n.$$

ω_0	1	2	3	4	5	6	7	8
	32.7	65.4	130.8	261.6	523.3	1046.5	2093.0	4186.0

$$2.a) M_q \int_0^1 \cos(2\pi mt) \sin(2\pi nt) dt = 0$$

$$\sin(2\pi mt) \cos(2\pi nt) = \frac{1}{2} (\sin(2\pi t(m+n)) + \sin(2\pi t(m-n)))$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2\pi t(m+n) dt &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi(m+n)} \left[-\cos(2\pi t(m+n)) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi(m+n)} \cdot (-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2\pi t(m-n) dt = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi(m-n)} \cdot (-1 + 1) = 0.$$

$$2.b) \overset{M_c}{2} \int_0^1 \sin(2\pi mt) \sin(2\pi nt) dt = \delta_{m,n} - \delta_{m,-n}.$$

$$2 \sin(2\pi mt) \sin(2\pi nt) = \cos(2\pi t(m-n)) - \cos(2\pi t(m+n)).$$

$$2 \int_0^1 \sin(2\pi mt) \sin(2\pi nt) dt = 2 \int_0^1 \cos 2\pi t(m-n) - \cos(2\pi t(m+n)) dt$$

$$\text{Si } m=n, \quad = 2 \int_0^1 1 - \cos 2\pi t(2n) dt = 1$$

$$m=-n \quad = 2 \int_0^1 \cos 2\pi t(-2n) - 1 dt = 1$$

$$\text{Sinon} \quad = 2 \left(\frac{1}{2\pi(m-n)} \left[\sin(2\pi t(m-n)) \right]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2\pi(m+n)} \left[\sin(2\pi t(m+n)) \right]_{t=0}^{t=1} \right)$$

$$= 2(0 - 0) = 0$$

3a. Montrer que:

$\forall k \in \mathbb{N}, c_k, s_k \in \mathbb{R}$

alors $\exists t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$c_k \cos(2\pi \cdot kt) + s_k \sin(2\pi \cdot kt) = \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos(2\pi \cdot k(t + t_0))$$

Dm// On commence par remarquer que

$\forall c_k, s_k \in \mathbb{R} \exists \theta \in [0, 2\pi)$

tel que $\left. \begin{aligned} c_k &= \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos \theta, \\ s_k &= \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \sin \theta \end{aligned} \right\}$ les « coordonnées polaires »

typiquement, on dit (r) pour "radius".

En particulier, $\theta = \arctan(s_k, c_k) \in [0, 2\pi)$.

On voudrait alors montrer qu'il existe t_0 tq.

$$\underbrace{\sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos \theta}_{c_k} \cos(2\pi \cdot kt) + \underbrace{\sqrt{c_k^2 + s_k^2} \sin \theta}_{s_k} \sin(2\pi \cdot kt) = \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos(2\pi \cdot k(t + t_0))$$

(On va négliger le coefficient $\sqrt{c_k^2 + s_k^2}$ pour la suite)

→ On utilise l'identité $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$.

$$\cos \theta \cos(2\pi \cdot kt) + \sin \theta \sin(2\pi \cdot kt) = \cos(\theta - 2\pi \cdot kt)$$

$$\cos(A - B) = \cos(B - A) \rightarrow = \cos(2\pi \cdot kt - \theta)$$

$\cos$ est périodique, alors aucun effet

$$= \cos(2\pi \cdot kt - \theta + 2\pi \cdot k) = \cos\left(2\pi k\left(t - \frac{\theta}{2\pi k} + 1\right)\right)$$

$\theta \in [0, 2\pi)$ alors $-\frac{\theta}{2\pi k} + 1 \in [0, 1]$.

On met $t_0 = 1 - \frac{\theta}{2\pi k}$ pour conclure.

Nota Bene

- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$.
- $\cos(A - B) = \cos(B - A)$
- J'écris $2\pi \cdot kt$, mais la multiplication est bien scalaire ($2\pi kt$)

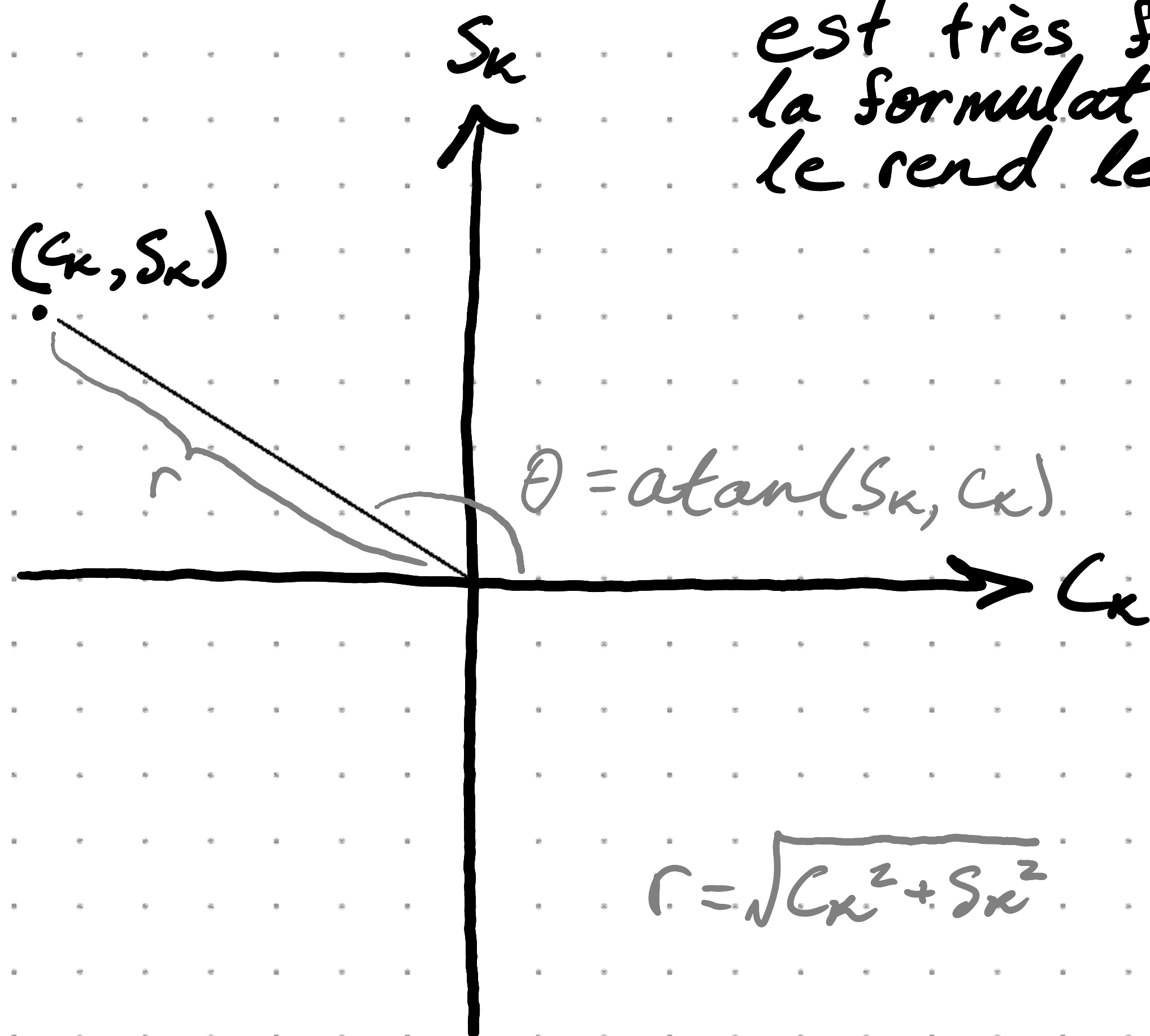
3b. Si $f(t) = r \cos(2\pi k(t+t_0))$ alors

$$r \cos(2\pi k(t+t_0)) = r \cos(2\pi kt) \cos(2\pi kt_0) + r \sin(2\pi kt) \sin(2\pi kt_0)$$

$$C_k = r \cdot \cos(2\pi kt_0)$$

$$S_k = r \cdot \sin(2\pi kt_0)$$

→ Le résultat de cet exercice est très fondamentale, mais la formulation de l'énoncé (3a) le rend lent à résoudre...



4a. $440 \cdot 2^{39/12}$ est sur le piano. On entend jusqu'à 20kHz

$$12 \cdot \log_2(20000/440) = 66.076$$

→ on peut rajouter 66 clés, ou 8 octaves.

4b. On entend jusqu'à 20 Hz. On a $440 \cdot 2^{-48/12}$ sur le piano.

$$\hookrightarrow 12 \cdot \log_2(20/440) = -53; \text{ alors, 5 clés.}$$

$$4c. 12 \cdot \log_2(45000/440).$$

$$4d. 90 \text{ kHz}$$

$$6. f(t) = \frac{1}{2} \sin 2\pi t - \frac{1}{3} \sin 6\pi t - \frac{1}{600} \sin 400\pi t$$

$$\hat{f}(1) = \frac{1}{2} \quad \hat{f}(3) = -\frac{1}{3} \quad \hat{f}(200) = -\frac{1}{600}$$

f a une période de 1.

$$8a) E2 (M: 2) \quad b) \#1$$

$$14. N' = |N - k \cdot 2N_{\max}|, \text{ où } k \text{ est le seul entier}$$

$$\text{t.q. } |N - k \cdot 2N_{\max}| \leq N_{\max}$$