

MAT2450 Intra 2025

1. Soit S la satellite, A, B deux récepteurs,

et choisissons un système de coordonnées tel que le centre de la terre se trouve à l'origine. Soit h "l'altitude" de S , et R le rayon de la terre.

a) Le délai entre le temps indiqué dans le message et le moment qu'il est reçu par le récepteur A (ou B) donne une durée de trajectoire t_A (ou t_B).

Alors S doit satisfaire $d(A, S) = \frac{t_A}{v}$ (et $d(B, S) = \frac{t_B}{v}$).

En même temps, dire que l'altitude de S vaut h est exactement équivalent à dire $d(O, S) = R + h$.

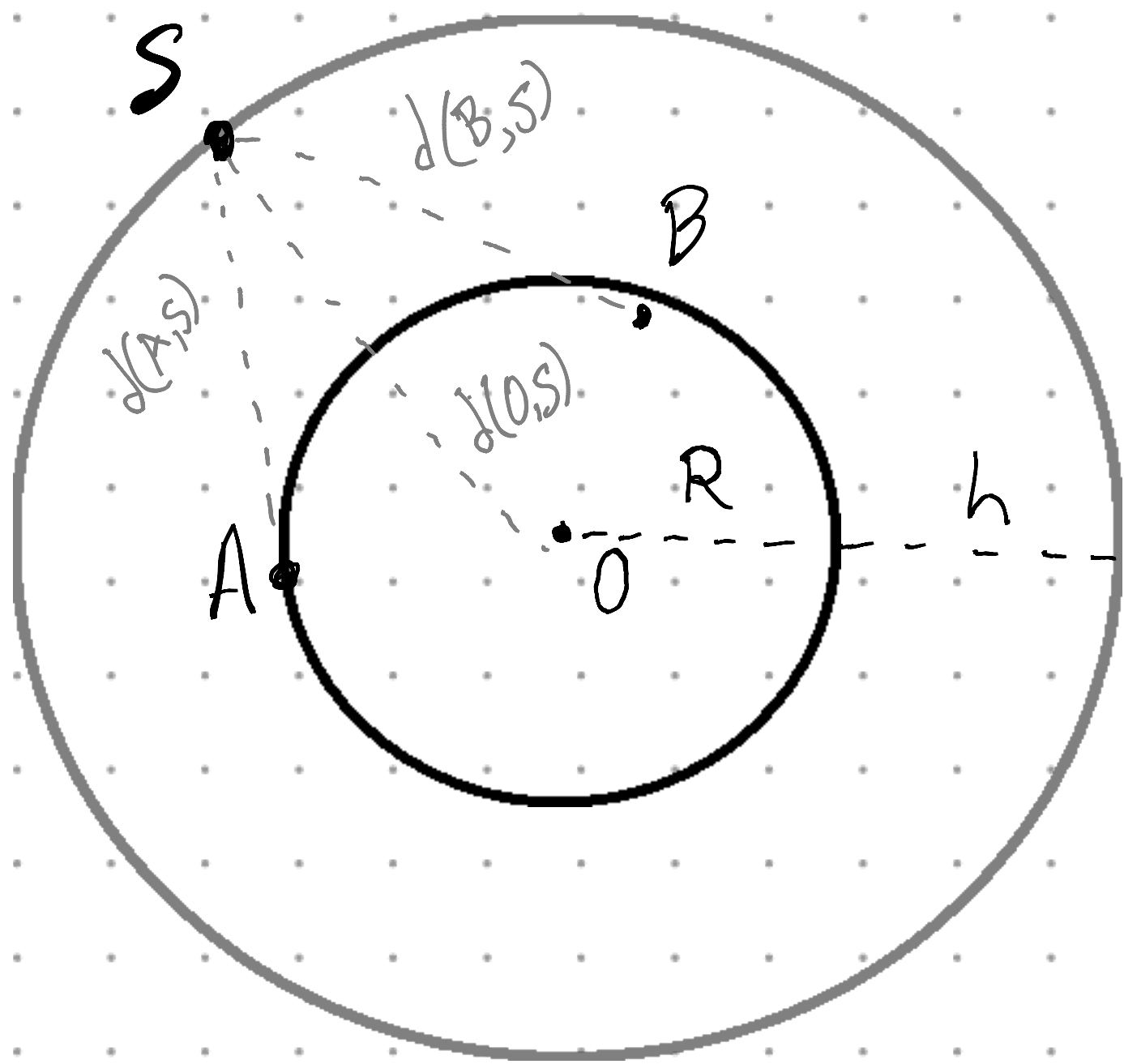
Alors finalement on a trois conditions, et chacune forme un sphère de solutions.

$$\text{i. } d(A, S)^2 = \left(\frac{t_A}{v}\right)^2 \quad \text{ii. } d(B, S)^2 = \left(\frac{t_B}{v}\right)^2 \quad \text{iii. } d(O, S)^2 = (R + h)^2$$

Tandis que A, B, O ne sont pas colinéaires,

il n'y aura qu'une solution S qui satisfait i, ii, et iii, comme vu dans le cours.

→ Il faut un minimum de 2 récepteurs alors pour avoir une solution unique



b) Pour trouver son trajectoire, il suffit de prendre un deuxième échantillon après le premier pour avoir deux localisations S_1, S_2 . (la satellite est d'abord à S_1 , ensuite à S_2). Ensuite il n'y a qu'un grand cercle unique qui est centré en O mais passé par S_1 et S_2 .

Intra 2025 Q2.

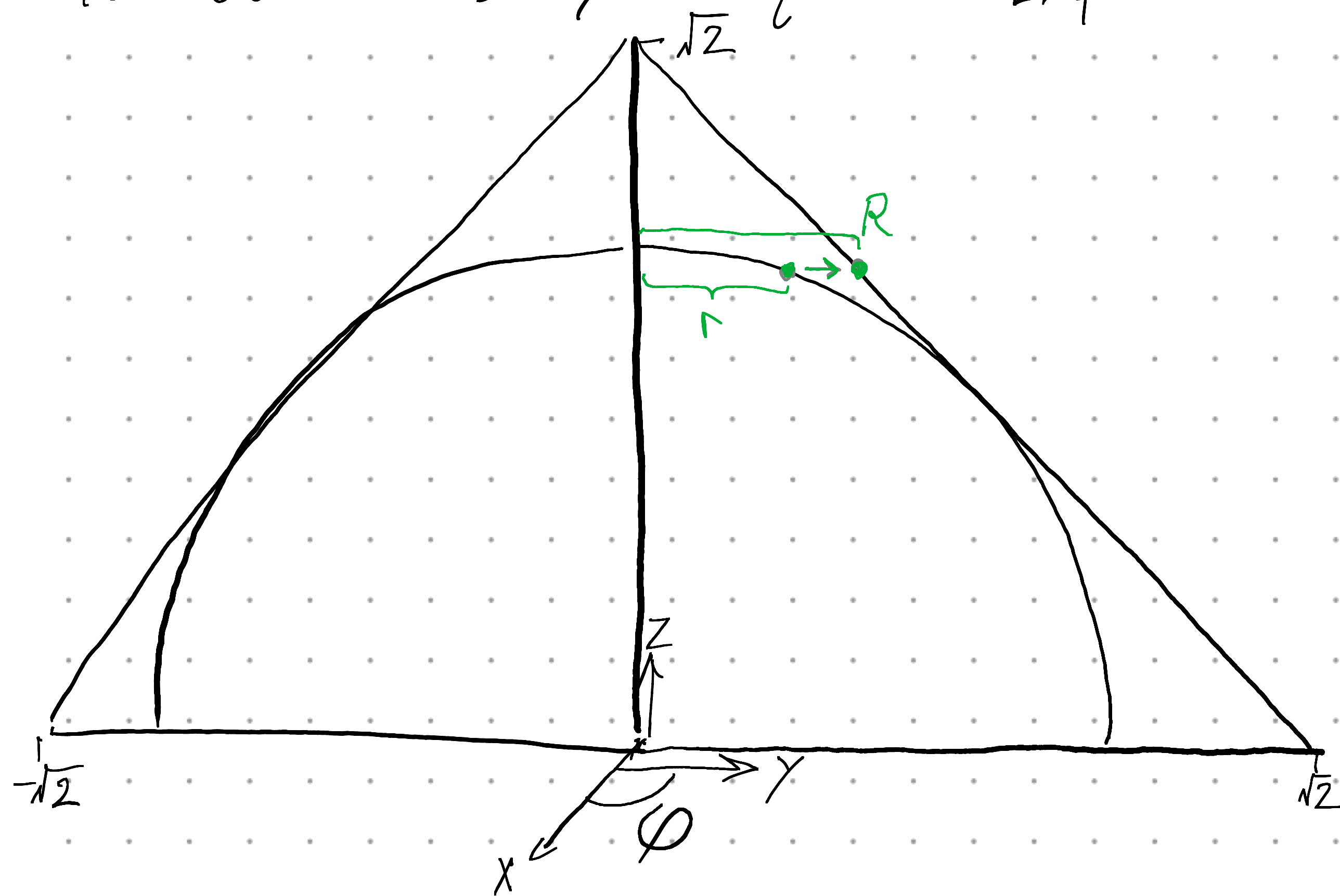
On fait une projection du hémisphère S au cône C

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

$$C = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} + z = \sqrt{2}, z \geq 0\}$$

Deux étapes qui simplifient le problème

1. Coordonnées cylindriques 2. Expliciter la projection



1. $(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

$$\rightarrow S = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) : r^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

$$C = \{(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) : R + z = \sqrt{2} \text{ et } z \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

$$\uparrow R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. On remarque que la projection est de la forme $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \rightarrow (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$

Je réponds à la question b d'abord:

pour C on impose $R + z = \sqrt{2} \rightarrow R = \sqrt{2} - z$ réponse à b.

Alors la projection est

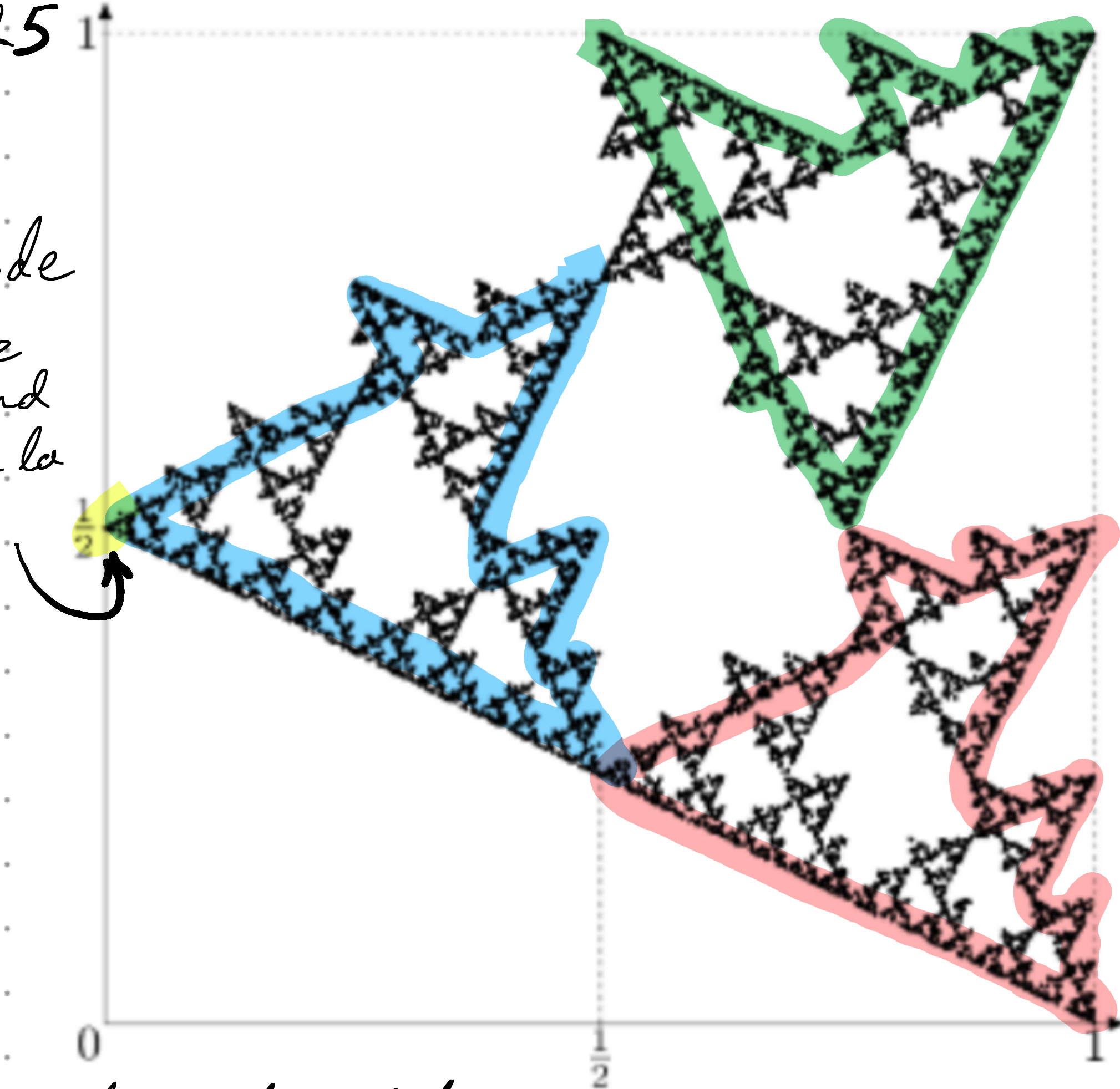
$$(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \mapsto ((\sqrt{2} - z) \cos \varphi, (\sqrt{2} - z) \sin \varphi, z)$$

Un parallèle P_z est l'ensemble $P_z = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) : r = \sqrt{1 - z^2}, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ (z est fixe!)

Projeté, il devient $P_z \mapsto \{(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) : R = \sqrt{2} - z, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ Réponse à a.
ce qui est un cercle de rayon R à "l'hauteur" z .

Intra 2025
Q3.

Tip: Regarde
où va ce
point quand
on applique la
transformation



a) Rappel : Matrice de rotation
 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightarrow R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T_1:$ $T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} \rightarrow r_1 = \frac{1}{2}$

$T_2:$ $T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow r_2 = \frac{1}{2}$

$T_3:$ $T_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} R\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow r_3 = \frac{1}{2}$

b) $r_1^d + r_2^d + r_3^d = 1 \rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1 \rightarrow d \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{1}{3}\right)$

$\rightarrow d = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(2)}$