

MAT2450TP2

1.6.4 Soit $S_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $S_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$, $S_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$

le positionnements des satellites, avec les temps d'arrivée t_1, t_2, t_3, t_4 . Soit $M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$ le point de l'explosion.

Rép. On peut voir que
Ce système est identique au cas du GPS avec un décalage d'horloge inconnu
↳ cf. 1.2.3 dans le livre

Si le temps de l'explosion est T alors on a

$$d(S_i, M) = v(t_i - T) \rightarrow d(S_i, M)^2 = v^2(t_i - T)^2 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

On a déjà démontré comment trouver la solution unique dans ch! du texte.

1.6.5. Si on prend $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ quelconques

et définit $u = P_2 - P_1$, $v = P_3 - P_1$,

Sous l'hypothèse que P_1, P_2, P_3 ne sont pas colinéaires on aura que $\text{span}(u, v) = \mathbb{R}^2$.

Les directions (Nord, Est) ne sont qu'un choix spécial où u, v sont conventionnels et orthonormes. dit "canonique"

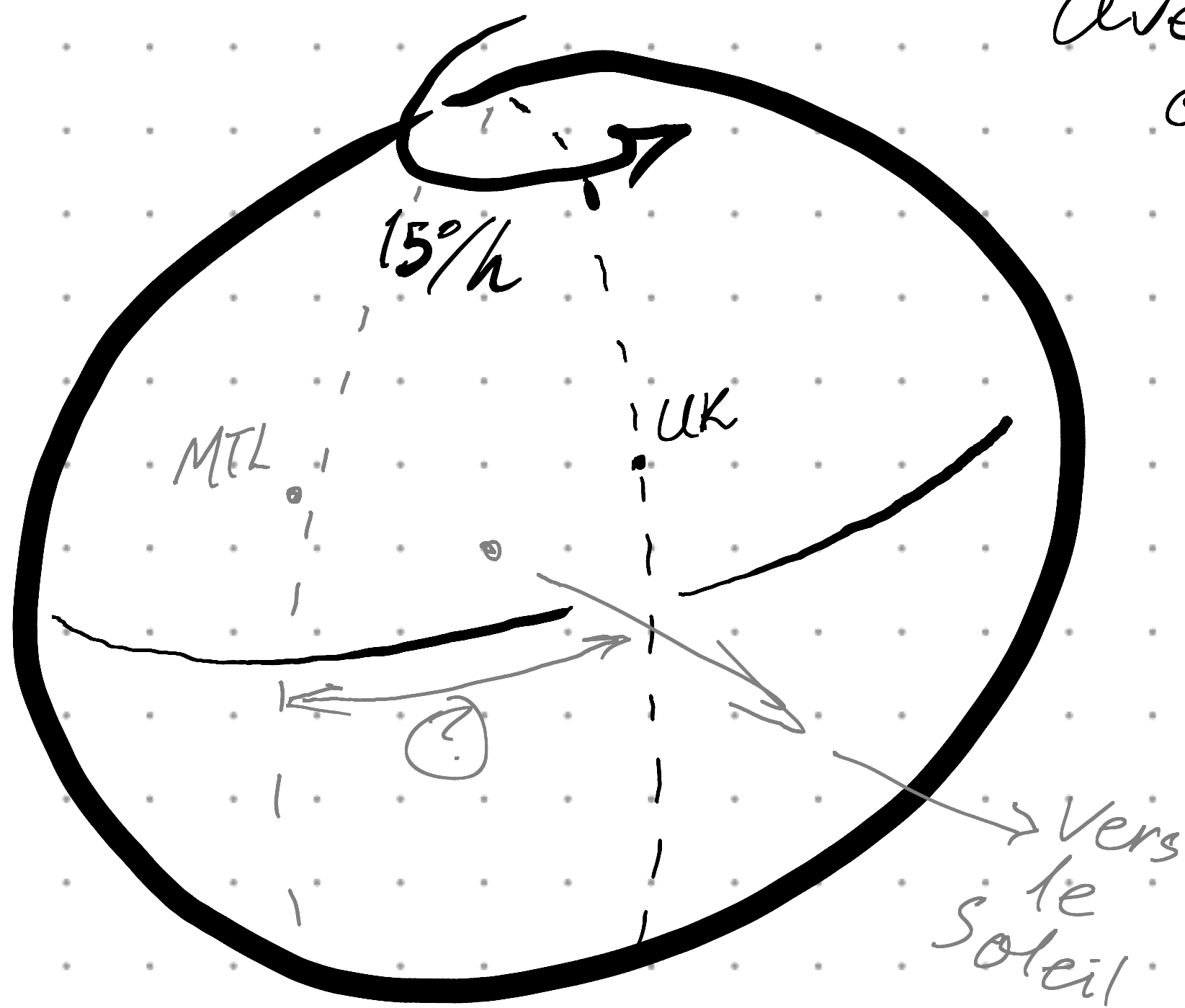
L'hypothèse à faire, pourtant, est que la carte est un plan ($\mathbb{R}^2$) et pas une volume ($\mathbb{R}^3$).

MAT2450 TP2

17. Le soleil à Greenwich est à son zénith à 12h.
Supposons que le notre est à son zénith à T,

Avec $(360^\circ \text{ rotations}) / (24h)$
on a $15^\circ/h$

$$\text{Donc } \Delta \text{longitude} = (T - 12) \cdot 15$$



Montréal est à 73°
→ décalage ~ 5.2 heures

22.

Sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Cylindre : $x^2 + y^2 = 1$

$L = \{t(x, y, z) : t > 0\}$

où est ce point?

On cherche le point dans L

tg. $x^2 + y^2 = 1$

$\rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

si on n'a pas $(0, 0, 1)$ ou $(0, 0, -1)$

L'intersection est à

$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

Pour la suite,

Coordonnées polaires : $(\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$

$t = (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{-1/2} = \cos \varphi$

$\rightarrow$ L'intersection est à $(\cos \theta, \sin \theta, \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi})$

b) Un méridien est avec θ fixe, alors

la projection est $\{(\cos \theta, \sin \theta, \tan \varphi) : \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$
càd une ligne verticale.

Un parallèle fixe φ , donc on a un cercle.

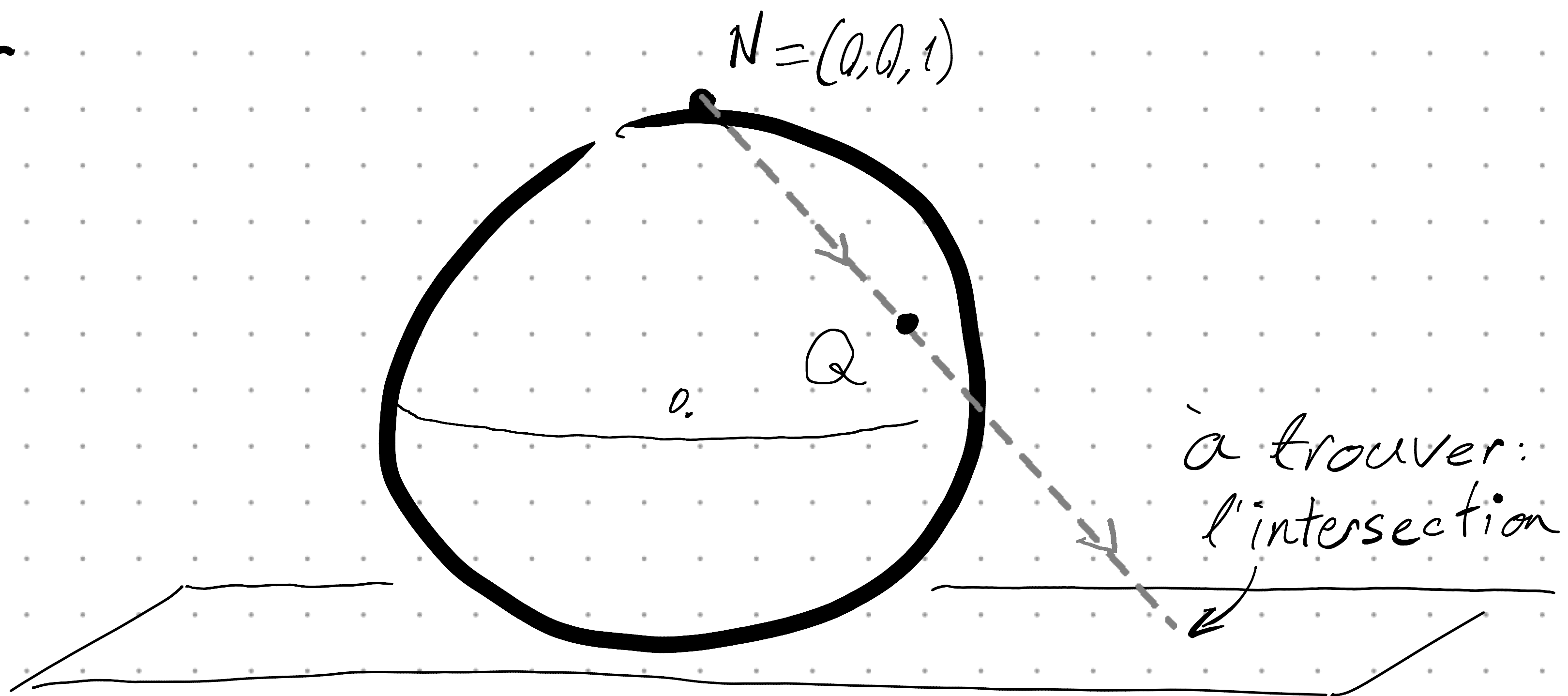
$\{(\cos \theta, \sin \theta, \tan \varphi) : \theta \in [0, 2\pi)\}$

c) Un grand cercle satisfait $ax + by + cz = 0$

$\rightarrow a \cos \theta + b \sin \theta + c \tan \varphi = 0$

$\rightarrow \left\{ \frac{a}{c} \cos \theta, \frac{b}{c} \sin \theta, -\frac{a}{c} \cos \theta - \frac{b}{c} \sin \theta \right\} : \theta \in [0, 2\pi)$

TP2
24.



La ligne est de la forme $\{(Q-N)t + N : t \geq 0\}$

On voudrait son intersection avec le plan $z = -1$.

On cherche alors t_z tel que $((Q-N)t + N)_z = -1$

$$\rightarrow (Q_z - N_z)t_z + N_z = -1 \rightarrow (Q_z - 1)t_z = -1 - 1$$

$$\rightarrow t_z = \frac{-2}{Q_z - 1}$$

Donc l'intersection est à

$$\left(Q_x \cdot \frac{-2}{Q_z - 1}, Q_y \cdot \frac{-2}{Q_z - 1}, -1 \right)$$

En effet,

$$(x, y, z) \mapsto \left(-\frac{2x}{z-1}, -\frac{2y}{z-1}, -1 \right).$$

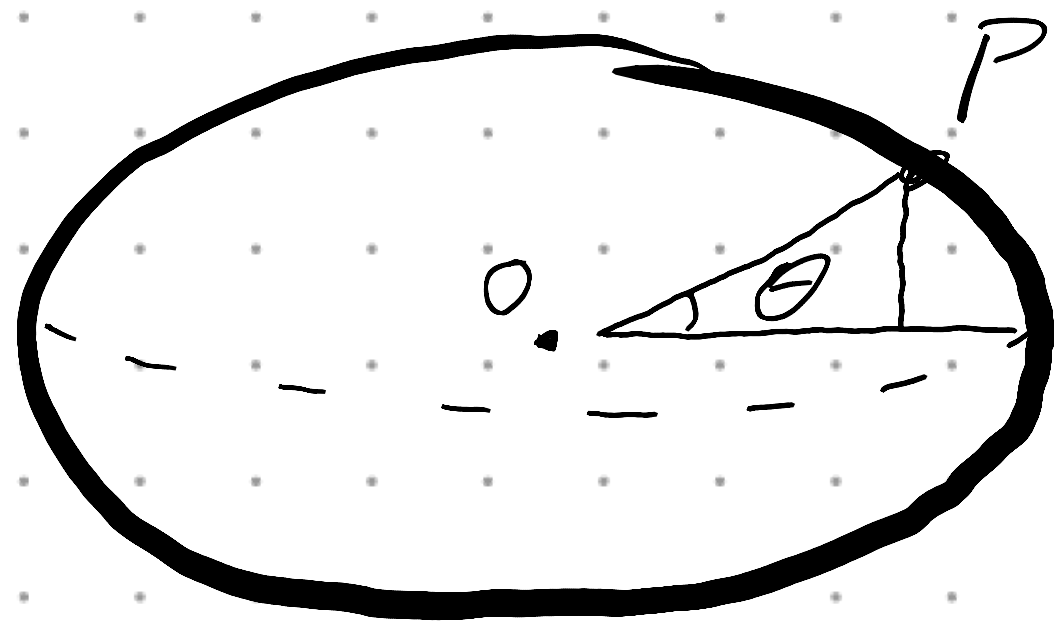
25. Un ellipsoïde est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow x = a \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = a \cos \theta \sin \varphi$$

$$z = b \sin \theta$$



Le tangent à P dans le coordonnées θ, φ est

$$\text{Tangent en } \theta : \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = t_\theta$$

$$= (-a \sin \theta \cos \varphi, -a \sin \theta \sin \varphi, -b \cos \theta)$$

en φ :

$$t_\varphi = (-a \cos \theta \sin \varphi, a \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

Le normal à P est donc $P_\perp = t_\varphi \times t_\theta$

$$P_\perp = \begin{vmatrix} -a \cos \theta \sin \varphi & a \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ -a \sin \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi & -b \cos \theta \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix}$$

$$= (-ab \cos^2 \theta \cos \varphi, ab \cos^2 \theta \sin \varphi, a^2 \cos \theta \sin \theta)$$

25. Pour trouver l'angle avec l'équateur, cont. il est plus fiable de trouver l'angle avec l'axe de rotation (α), c'est son complément.

On cherche alors α : $\|P_{\perp}\| \|(i)\| \cos \alpha = \langle P_{\perp}, (i) \rangle$

où $\|(i)\| = 1$

$$\langle P_{\perp}, i \rangle = a^2 \cos \theta \sin \theta$$

et

$$\|P_{\perp}\| = \sqrt{\langle P_{\perp}, P_{\perp} \rangle}$$

$$\langle P_{\perp}, P_{\perp} \rangle = a^2 b^2 \cos^4 \theta \cos^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^4 \theta \sin^2 \varphi + a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\|P_{\perp}\| = \left| a \sqrt{b^2 \cos^4 \theta + a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right|$$

$$= |a \cos \theta \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}|$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{a^2 \cos \theta \sin \theta}{|a \cos \theta \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}|} = k_0$$

$$\alpha = \cos^{-1}(k_0)$$

Notre réponse finale est $90^\circ - \cos^{-1}(k_0)$.