

# Mat2450 TP1

Question 1, au max détail possible:

1. Le dénominateur en question est le déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}$$

à montrer:

$\det(A) = 0$  si les quatres satellites  
sont sur le même plan

Dm// Pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  soit  $d_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Notre matrice  $A$  est de la forme

$$A = 2 \begin{pmatrix} | & | & | \\ (d_4 - d_1) & (d_4 - d_2) & (d_4 - d_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}^T \quad \text{(je vais écrire M)}$$

★ Observations clé que j'exprimais mal  
pendant le TP:

1) Si  $m$  vecteurs  $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  sont coplanaires, alors  
ils ne sont pas linéairement indépendants.  
Il existe deux vecteurs génératrice  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$   
et des coefficients  $\{k_{i1}, k_{i2}\}_{i=1}^m$  tq.  $d_i = k_{i1}e_1 + k_{i2}e_2$

2) Si  $M$  est une matrice carré

$$\text{alors } \det(\underbrace{2M^T}_A) = 2 \det(M)$$

Supposons que  $d_1, d_2, d_3, d_4$  appartiennent tous au même plan

$\Rightarrow$  Il existe  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$  ainsi que l'ensemble  $\{k_{ij}\}_{\substack{i \leq 4 \\ j \leq 2}}$   
Ensuite on peut dire

$\exists (k'_{i1}, k'_{i2})$  : pour que  $d_4 - d_i = k'_{i1}e_1 + k'_{i2}e_2$

En particulier,  $k'_{i1} = k_{41} - k_{i1}$ ,  $k'_{i2} = k_{42} - k_{i2}$

Alors notre matrice  $M$  s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} | & | & | \\ (k'_{11}e_1 + k'_{12}e_2) & (k'_{21}e_1 + k'_{22}e_2) & (k'_{31}e_1 + k'_{32}e_2) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Trois vecteurs de colonne générés par deux vecteurs  $(e_1, e_2)$

$$\Rightarrow \text{rang}(M) \leq \dim(\text{span}(e_1, e_2)) \leq 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{strictement} \\ \text{inférieur} \\ \text{à } 3 \end{array} \right\}$$

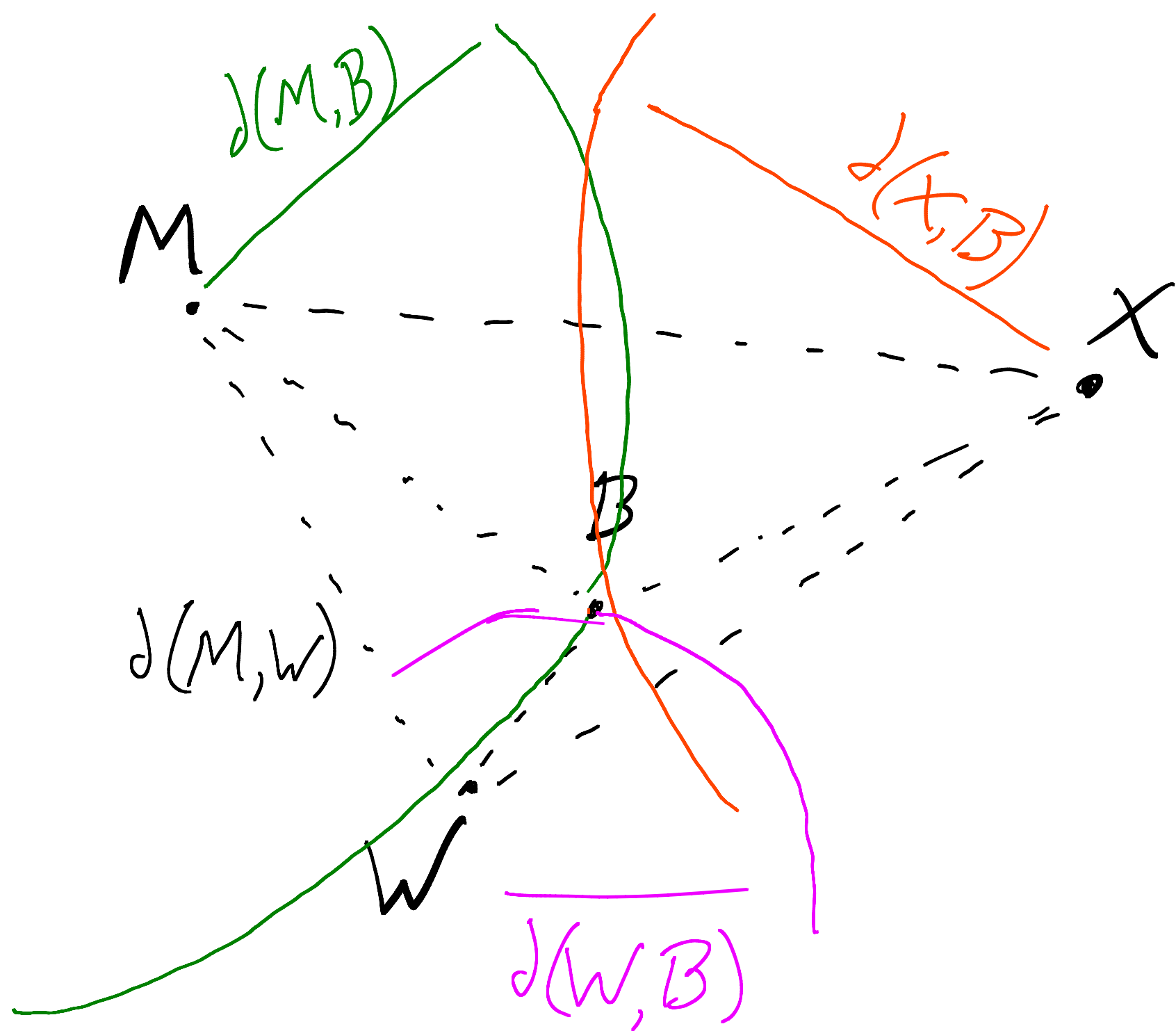
$$\Rightarrow \det(M) = 0$$

$$\Rightarrow \det(2M^T) = 0$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0 \quad \text{CQFD.}$$



2.



$t_m$  : temps de reception  
du signal M

$t_x$  : " " signal X

$t_w$  : " " signal W

$c$  : vitesse de propagation

• La station W attend  $T_w$  avant de rediffuser

" " X "  $T_x$  " " "

a) Démontrer que la connaissance  
de  $t_x - t_m$  et  $t_w - t_m$  suffit pour trouver  
sa localisation.

Réponse

$$t_w - t_m = \underbrace{\left( \frac{d(W,M)}{c} + T_w + \frac{d(W,B)}{c} \right)}_{t_w} - \underbrace{\frac{d(M,B)}{c}}_{t_m}$$

$$\Rightarrow d(W,B) = c(t_w - t_m - T_w) - d(W,M) + d(M,B)$$

$$t_x - t_m = \underbrace{\left( \frac{d(X,M)}{c} + T_x + \frac{d(X,B)}{c} \right)}_{t_x} - \underbrace{\frac{d(M,B)}{c}}_{t_m}$$

$$\Rightarrow d(X,B) = c(t_x - t_m - T_x) - d(X,M) + d(M,B)$$

En connaissant  $t_m$  on a aussi  $d(M,B) = c t_m$ .

Les trois cercles s'intersectent à exactement un point

26.

$$t_w - t_x = \underbrace{\left( \frac{d(W,M)}{c} + T_w + \frac{d(W,B)}{c} \right)}_{t_w} - \left( \frac{d(X,M)}{c} + T_x + \frac{d(X,B)}{c} \right)$$

$$\rightarrow t_w - t_x - \frac{d(W,M)}{c} - T_w + \frac{d(X,M)}{c} + T_x = \frac{d(W,B)}{c} - \frac{d(X,B)}{c}$$

$$\rightarrow \underbrace{t_w - t_x - d(W,M) + d(X,M) - T_w \cdot c + T_x \cdot c}_{K} = d(W,B) - d(X,B)$$

→ Toutes ces variables sont à notre disposition, alors on peut remplacer toute l'expression avec  $K$

$$\Rightarrow \boxed{K = d(W,B) - d(X,B)}$$

L'ensemble des valeurs  $B$  sur le plan qui satisfont cette égalité sont une hyperbole

Essaie sur desmos:

Remplacer ces valeurs comme tu veux. Je propose

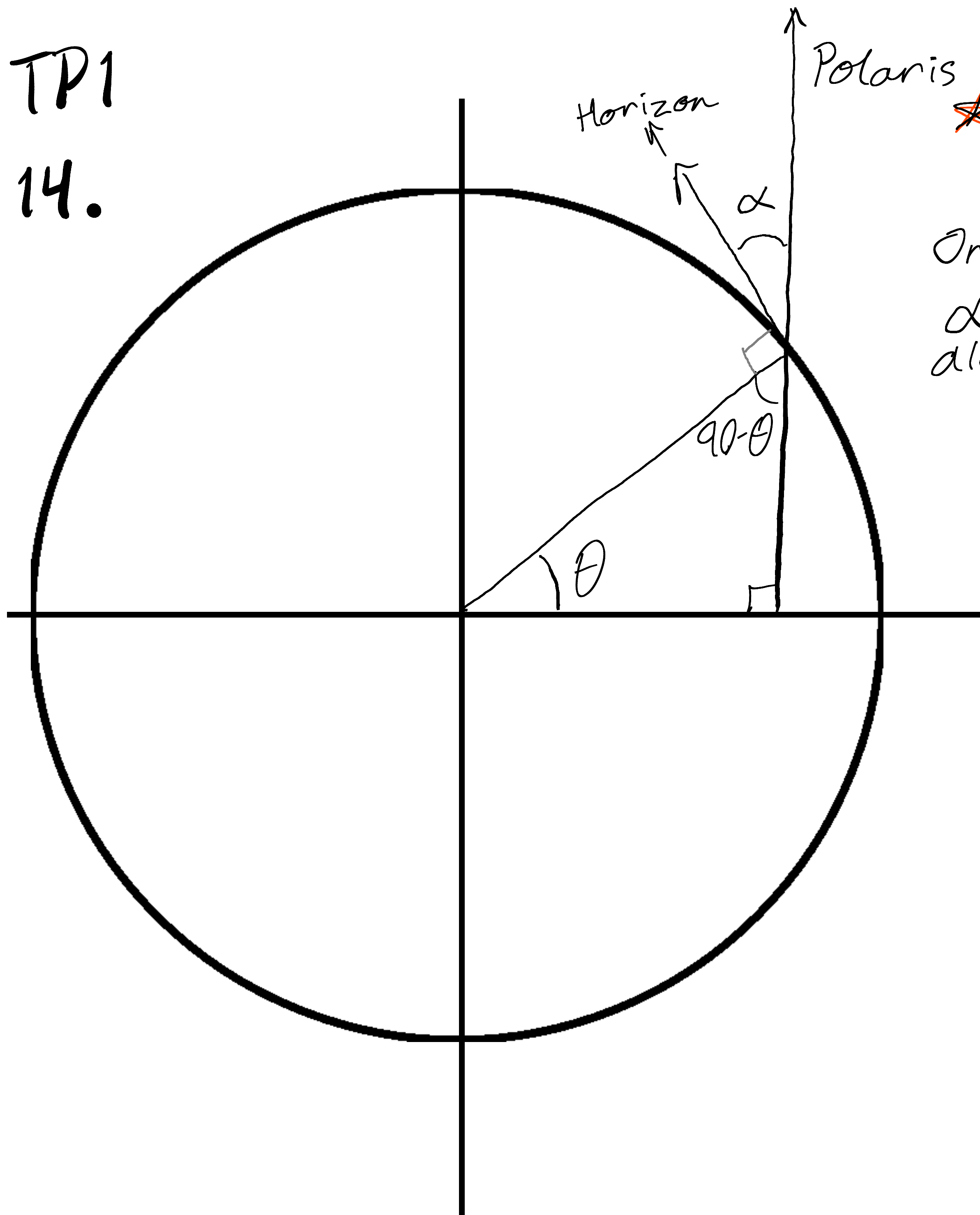
$$C = \sqrt{(w_1 - x)^2 + (w_2 - y)^2} - \sqrt{(x_1 - x)^2 + (x_2 - y)^2}$$

|         |   |   |    |    |
|---------|---|---|----|----|
| ↑       | ↑ | ↑ | ↑  | ↑  |
| $\pm 2$ | 1 | 1 | -2 | -1 |



TP1

14.



Polaris



On veut  $\alpha$   
en fonction de  $\theta$

On sait que

$$\alpha + 90^\circ + (90^\circ - \theta) = 180^\circ$$

alors

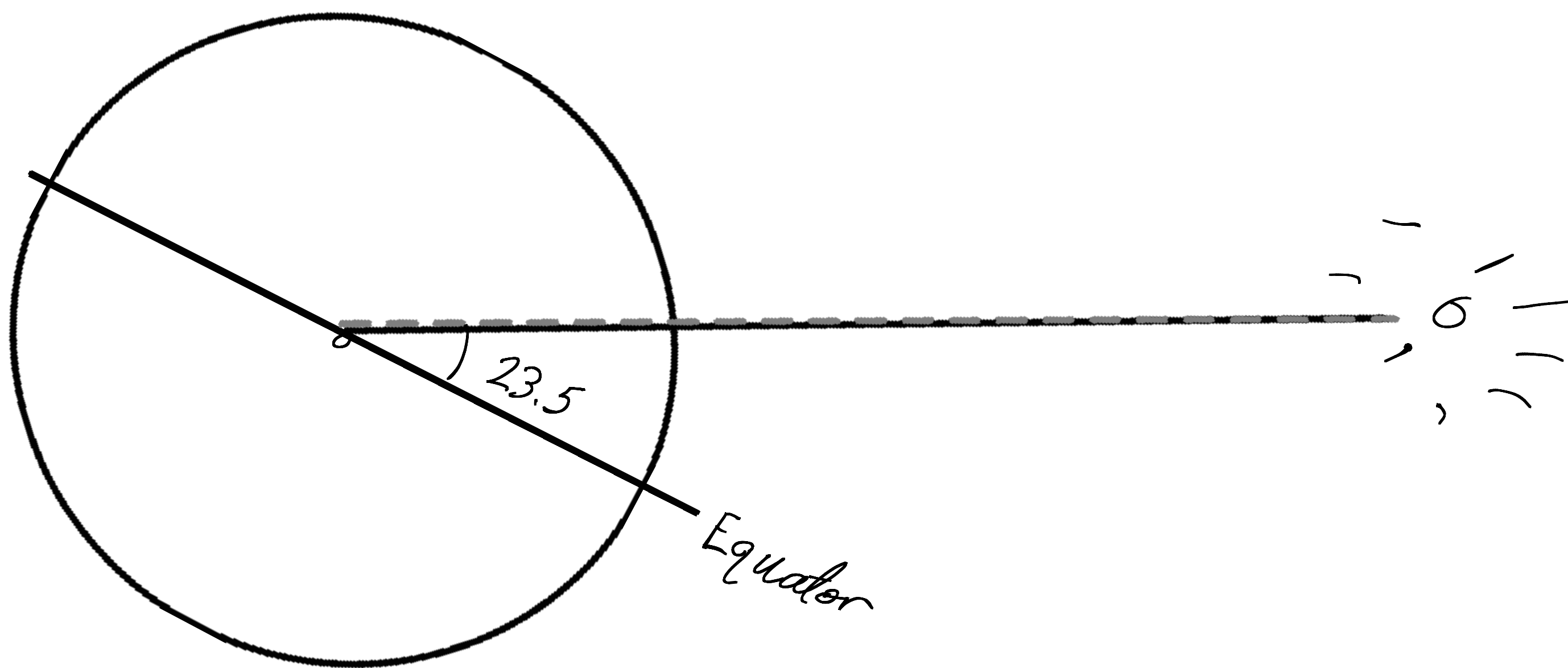
$$\Rightarrow \alpha = \theta.$$

On sait que  $\alpha + 90^\circ + (90^\circ - \theta) = 180^\circ$

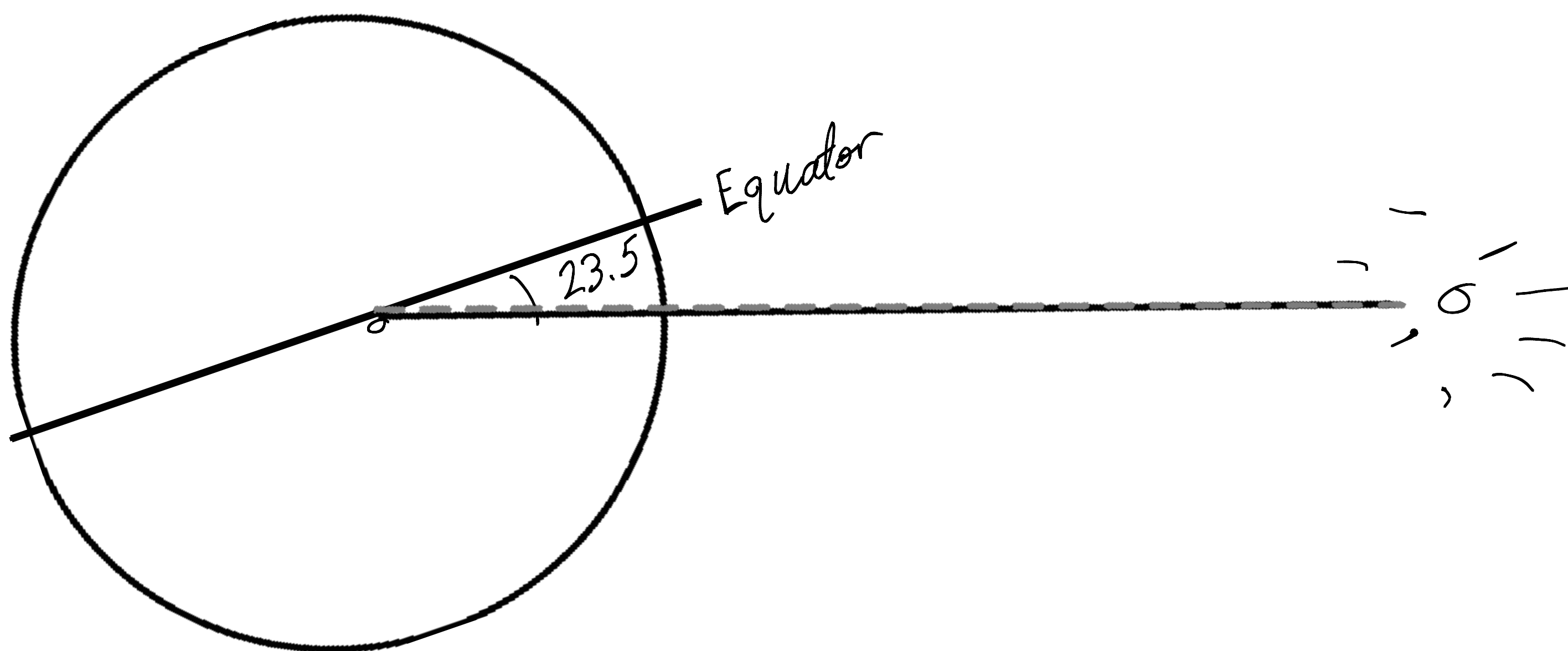
$$\text{alors } \alpha - \theta = 180^\circ - 180^\circ \rightarrow \alpha = \theta$$

à latitude  $60^\circ$ , on voit Polaris  $60^\circ$  au-dessus  
de l'horizon; à  $0^\circ$ , elle est sur l'horizon.

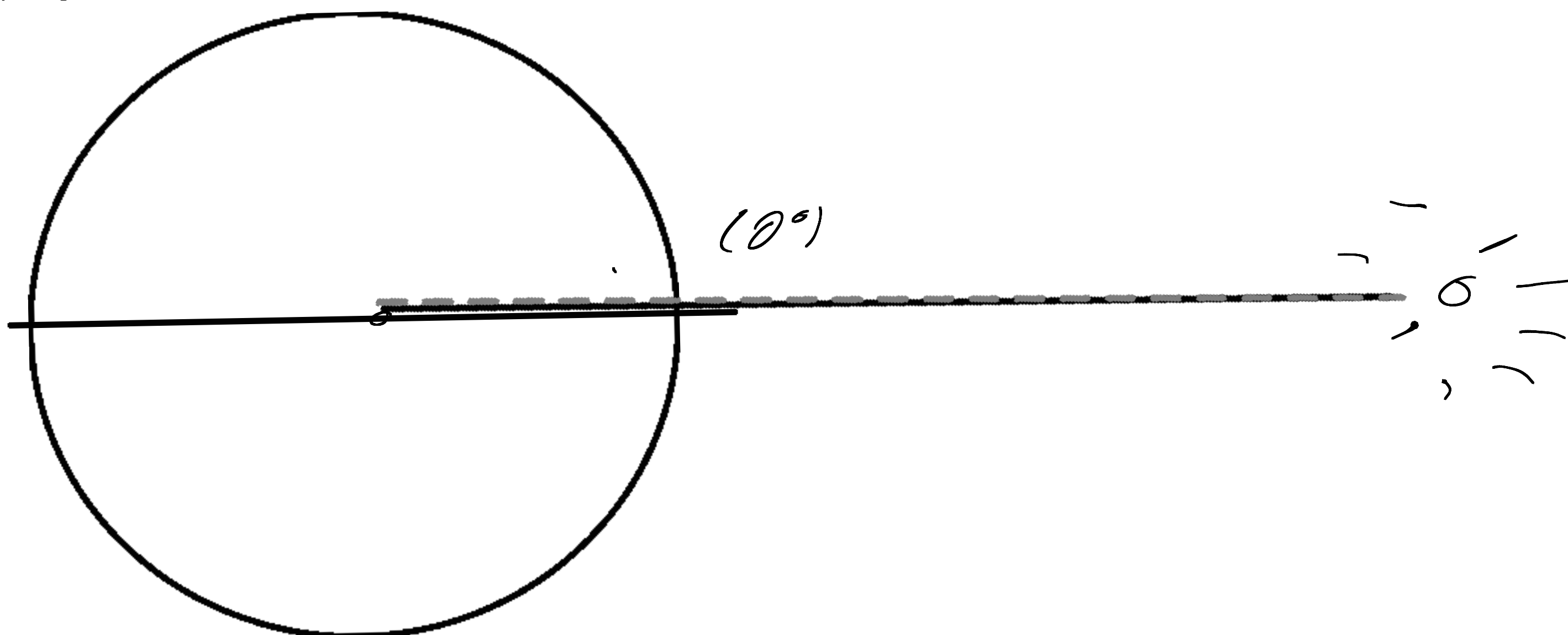
# 15. Idée Générale: Solstice d'été



## Solstice d'hiver



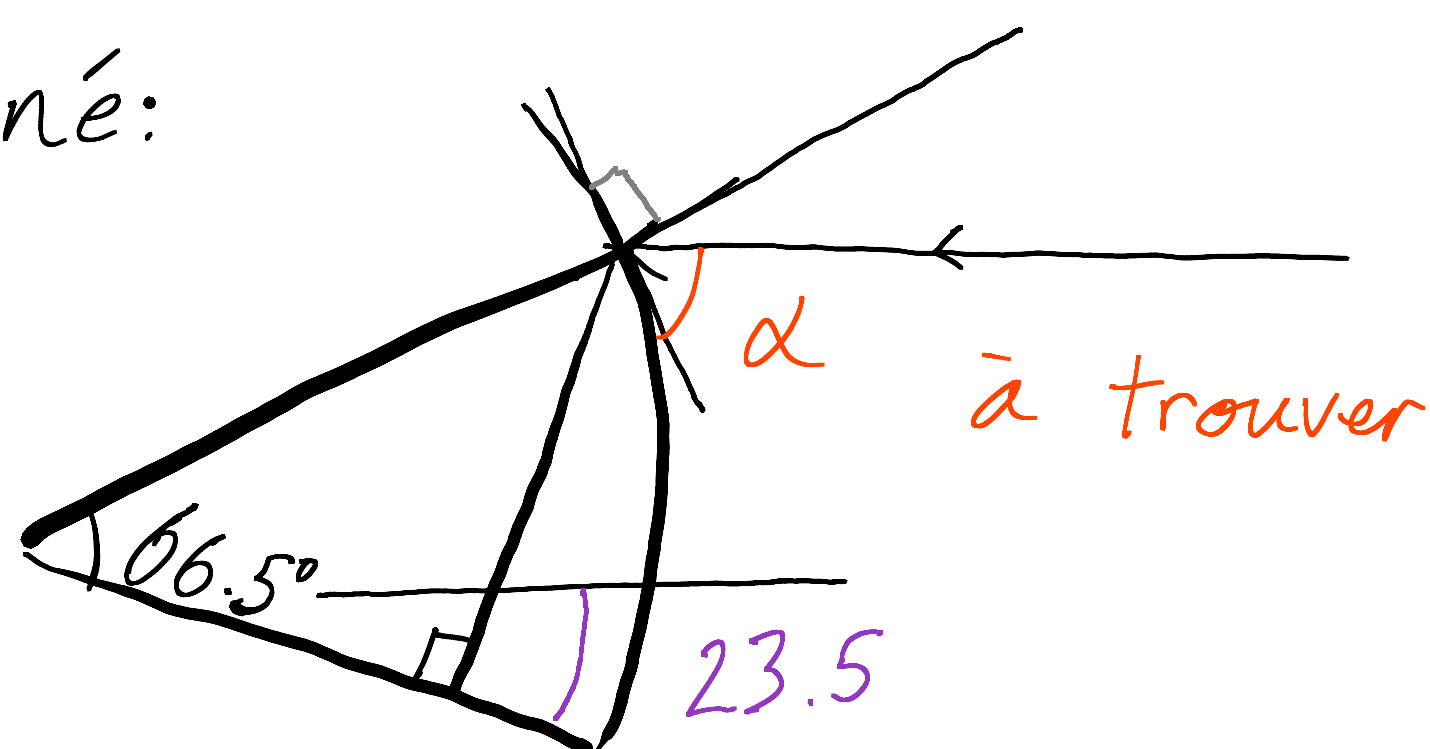
## Equinoxes:



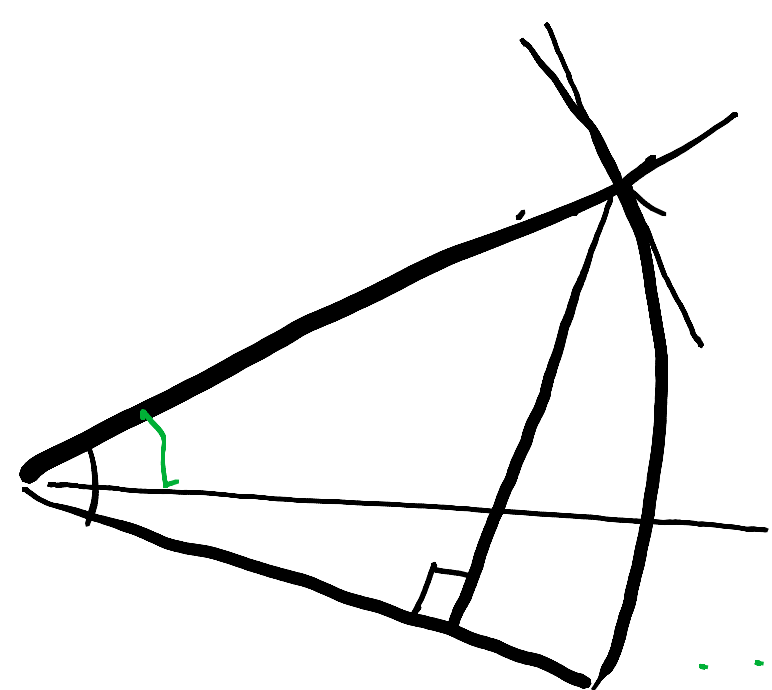


a) Solstice d'été,  $\theta = 66.5^\circ$ :

Donné:

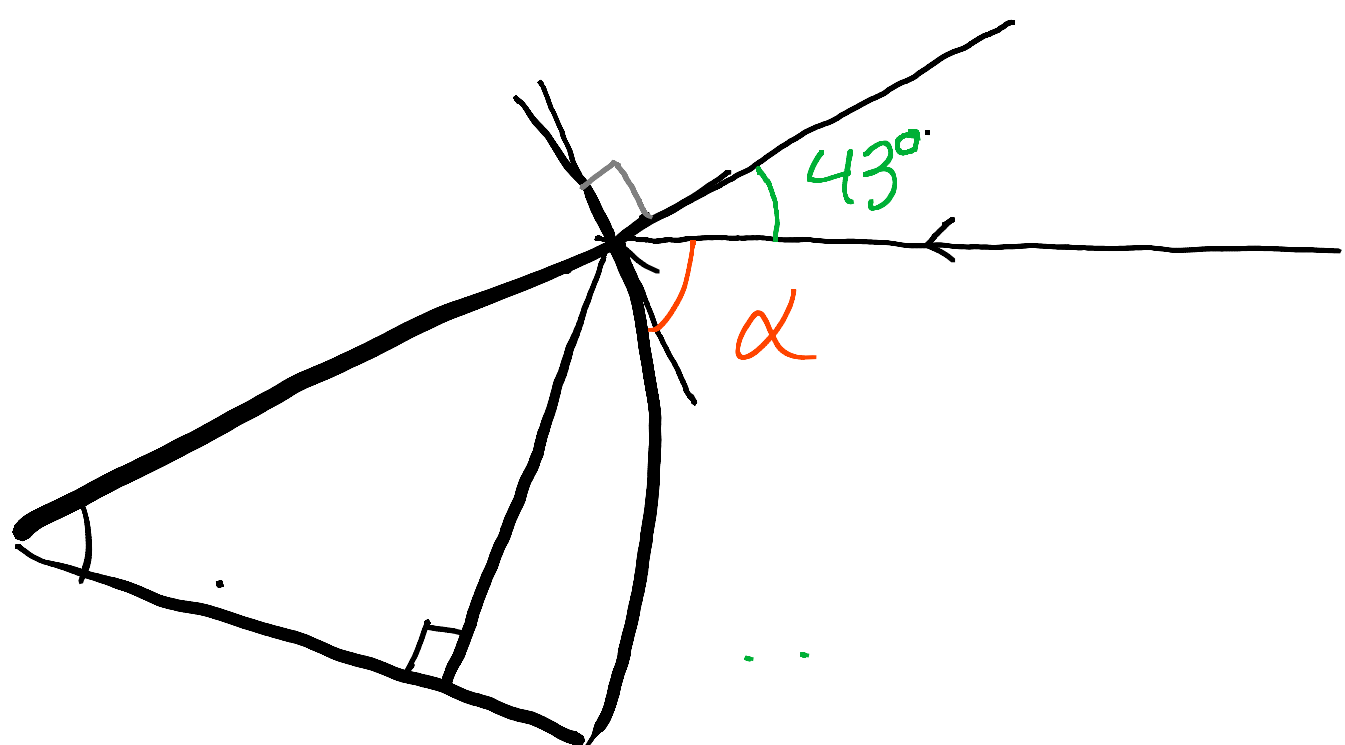


alors



avec  $\angle = 66.5^\circ - 23.5^\circ = 43^\circ$

donc



$$43^\circ + \alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 47^\circ$$

Réponse:  $\alpha = 47^\circ$

Le reste :

Observons que si on a latitude  $\theta$   
et inclinaison initial  $\gamma$

Alors l'angle  $\angle$  sera toujours  $\theta - \gamma$   
et on aura  $\alpha = 90^\circ - (\theta - \gamma)$

Ce qui reste à faire est juste  
une interprétation des saisons.

| $\theta$              | $\gamma$            | $\alpha$ |
|-----------------------|---------------------|----------|
| 66.5°                 | 23.5<br>Sol. Été    | 47°      |
|                       | 0° Equinoxes        | 23.5     |
|                       | -23.5<br>Sol. Hiver | 0°       |
| (ainsi de suite)<br>↓ | 23.5                | ↓        |
|                       | 0                   |          |
|                       | -23.5               |          |



15e. la valeur  $\gamma$  transitionne continuellement au cours de l'année de  $-23.5^\circ$  à  $23.5^\circ$

Donc pour quel  $\theta$  existe-il une  $\gamma \in [-23.5, 23.5]$  tel que  $\alpha = 90^\circ$ ?

$$\alpha = 90 - (\theta - \gamma)$$

Tout  $\theta \in [-23.5^\circ, 23.5^\circ]$  permet alors une telle valeur  $\gamma$ .

16. On trouve juste l'invers de la question 15

Cette fois on a  $\gamma$  et on récupère  $\theta$  en sachant  $\gamma = 23.5^\circ$ , comme on est au solstice d'été

$$\alpha = 90 - (\theta - \gamma) \Rightarrow \theta = 90 - (\alpha - \gamma)$$



# TP1.18

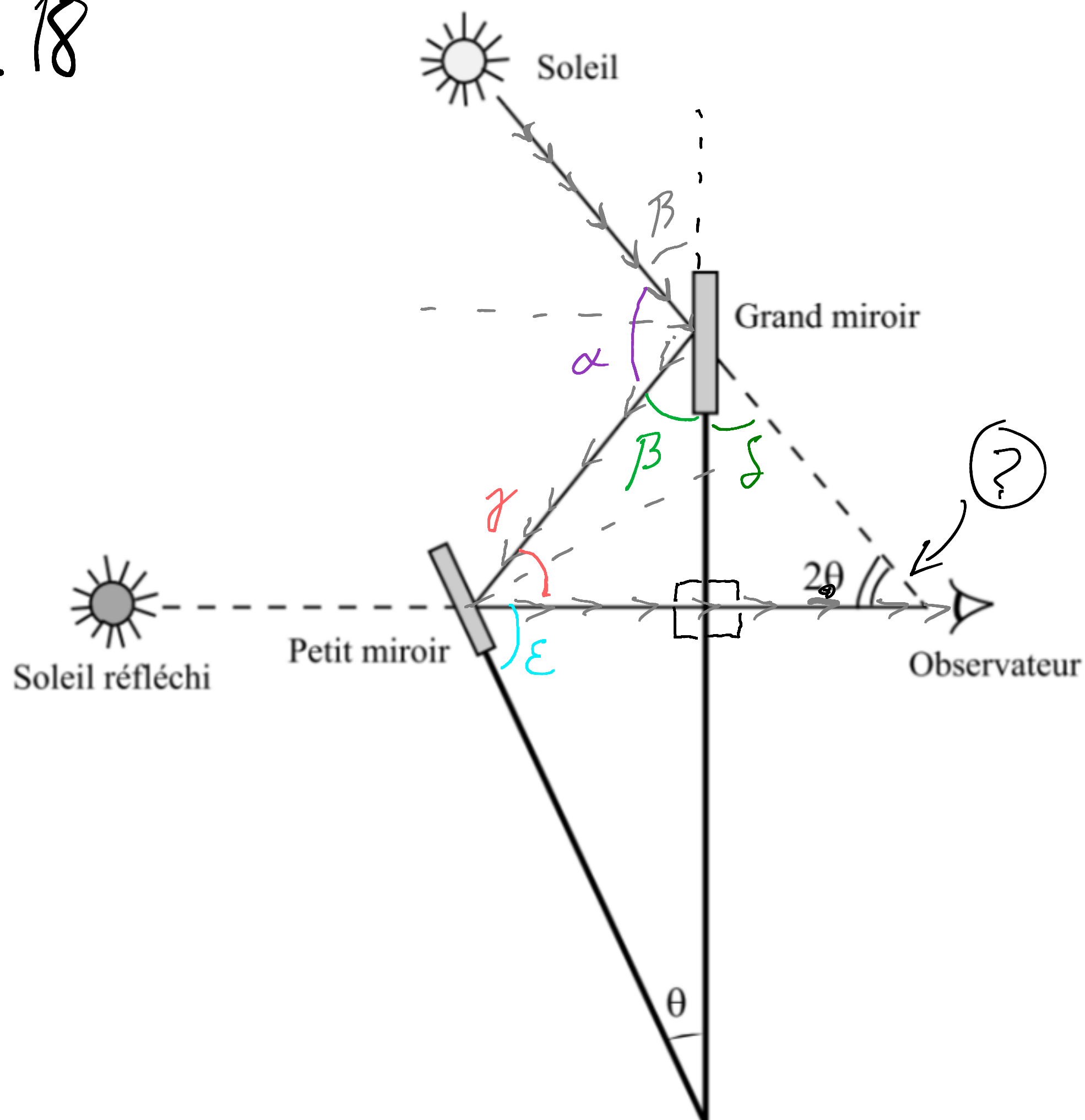


Fig. 1.12. Le fonctionnement du sextant (exercice 18)

$$\epsilon = 180 - 90 - \theta = 90 - \theta$$

$$\gamma + 2\epsilon = 180 \rightarrow \gamma = 180 - 2(90 - \theta) \rightarrow \gamma = 2\theta$$

$$\beta + 90 + \gamma = 180 \rightarrow \beta = 180 - 90 - 2\theta = 90 - 2\theta$$

$$\alpha + 2\beta = 180 \rightarrow \alpha = 180 - 2(90 - 2\theta) = 4\theta$$

$$\delta + \alpha + \beta = 180 \rightarrow \delta = 180 - 4\theta - (90 - 2\theta) = 90 - 2\theta$$

$$\delta + 90 + (?) = 180 \rightarrow (?) = 90 - \delta = 2\theta$$

CQFD.

Si la houle nous cause de faire une erreur visuelle de  $\Delta$ , alors notre mesure divergera par  $\frac{1}{2}\Delta$  de la vérité.  $\rightarrow$  on réduit les erreurs par un facteur de 2.