

Mathématiques et technologie

Examen intra – hiver 2025

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

Enseignant : Jonathan Godin

Sigle : MAT2450A

Date : Vendredi le 21 février 2025

/75

L'examen dure 110 minutes. Vous avez droit au livre du cours (en papier ou en pdf) et à vos notes personnelles. Vous pouvez utiliser un ordinateur (sans Internet) ou une tablette, mais pas un téléphone. La calculatrice est permise. **Justifiez vos réponses.**

Question 1. On a perdu la position d'un satellite en orbite autour de la Terre. On connaît l'altitude du satellite. Le satellite émet périodiquement un message (qui se déplace à la vitesse de la lumière v) qui indique l'heure sur l'horloge du satellite au moment de l'émission du message.

On possède des récepteurs dont leur position est connue. On suppose que les horloges des récepteurs sont synchronisées entre elles et avec l'horloge du satellite.

- (13pts) a) Expliquer comment retrouver la position du satellite après avoir reçu un message.
- L'explication doit être géométrique. Inclure un dessin.
 - Indiquer le nombre minimal de récepteurs nécessaires (en justifiant, bien sûr).
 - Inclure les équations pertinentes dans l'explication (sans résoudre).
- (7pts) b) Expliquer comment retrouver la trajectoire du satellite. On tient pour acquis que l'orbite du satellite est un cercle centré au centre de la Terre.

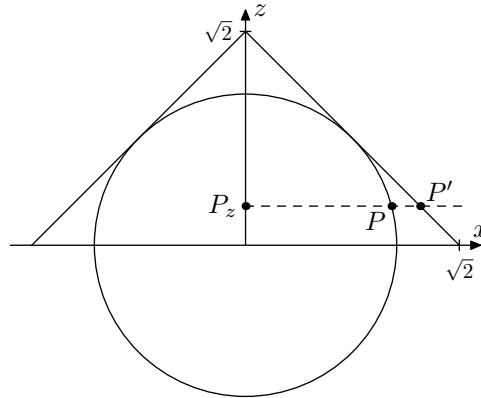
Question 2. On considère que la Terre est la sphère S de rayon 1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On projette l'hémisphère nord ($z > 0$) sur le cône C d'équation* $z = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2}$ comme suit :

Soit P un point sur l'hémisphère nord de S . Soit P_z la projection de P sur l'axe des z . Le projeté P' de P sur C est le point d'intersection de la demi-droite P_zP avec C . (Voir la figure.)

*C'est l'équation du cône qui pointe vers le bas (l'axe des z négatif) et qui est tangent à la sphère le long du parallèle au 45° nord.

(Suite au verso)

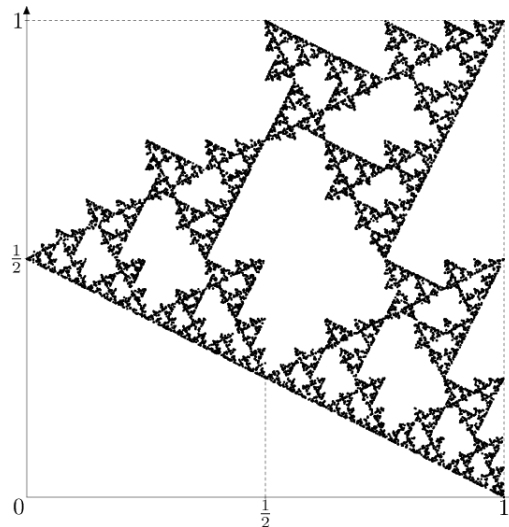
- (10pts) a) Montrer que l'image d'un parallèle sur l'hémisphère nord est un cercle.
Suggestion. Argumenter d'abord que l'image d'un parallèle correspond à l'intersection d'un plan avec C .
- (5pts) b) Supposons que $P = (a, b, c)$. Donner une formule pour le rayon du cercle en terme de c .



Coupe de la sphère et du cône dans le plan xz .

Question 3. On considère le fractal ci-bas.

- (20pts) a) Trouver le système de fonctions itérées dont l'attracteur est ce fractal.
Remarque. Trouver les équations exactes. Il y a assez d'information sur le dessin, donc une approximation n'est pas suffisante. Vous pouvez faire un dessin dans votre cahier d'examen pour aider à justifier.
- (10pts) b) Calculer la dimension de ce fractal en utilisant la méthode des carrés.



Question 4. (10pts) On a trois sites placés aux positions suivantes : $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (\sqrt{3}, 1)$, $P_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Montrer que l'origine $(0, 0)$ fait partie des trois cellules de Voronoï, c'est-à-dire que $(0, 0) \in V(P_1)$, $(0, 0) \in V(P_2)$ et $(0, 0) \in V(P_3)$.