

Mathématiques et technologie

Examen final – hiver 2023

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

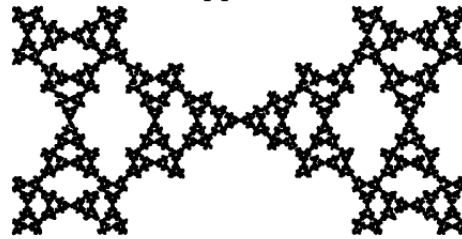
Enseignant : Jonathan Godin

Sigle : MAT2450A

Date : mardi le 18 avril 2023

L'examen dure 170 minutes. Vous avez droit au livre du cours (en papier ou en pdf) et à vos notes personnelles. Vous pouvez utiliser un ordinateur (sans Internet) ou une tablette, mais pas un téléphone. La calculatrice est permise. **Justifiez vos réponses.**

Question 1. (25pts) Choisir un système de coordonnées, c'est-à-dire l'origine, l'axe des x et l'axe des y (faites une esquisse du dessin dans votre cahier et indiquez le système sur votre esquisse), et donner les transformations linéaires qui permettent d'obtenir le fractale suivant. (Je permets une marge d'erreur dans les rapports d'homothéties et les translations.)



Question 2. Les questions a), b) et c) sont indépendantes.

- (5pts) a) On veut transmettre un message par un canal spécial pour lequel la probabilité d'avoir deux erreurs est de 50% et la probabilité d'avoir plus de deux erreurs est de 0,001%. Est-il préférable d'utiliser le code de Hamming $C(7, 4)$ ou un code de Reed-Solomon ?
- (10pts) b) Soit $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ le corps à neuf éléments.
- i) Avec $\alpha := x$ comme racine primitive, trouver un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n = 2x + 1$ dans $\mathbb{F}_9$.
 - ii) On veut envoyer un message $u \in (\mathbb{F}_9)^2$ en utilisant le code de Reed-Solomon $C(8, 2)$. Le destinataire reçoit un $w \in (\mathbb{F}_9)^8$ et se met à résoudre les systèmes linéaires. Il compte le nombre de fois qu'il calcule chaque solution et trouve

$$u_1 : 21 \text{ fois}, \quad u_2 : 5 \text{ fois} \quad \text{et} \quad u_3 : 2 \text{ fois}.$$

Peut-il déterminer le message original, sachant qu'il y a au plus 3 erreurs ? Expliquer.

- (10pts) c) On utilise le code de Hamming $C(7, 4)$ avec la matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Déterminer la matrice génératrice G .
- ii) On reçoit le message $w = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$. En supposant qu'il y a au plus une erreur, déterminer où est l'erreur, s'il y en a une, et quel est le message original $u \in (\mathbb{F}_2)^4$.

(Suite au verso)

Question 3. (9pts) a) Compléter la matrice C , 3×3 , donnant la transformation en cosinus discrète utilisée par le standard JPEG pour $N = 3$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & c & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(8pts) b) Soit $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de la base canonique. Calculer $C^T e C$. Que représente la matrice obtenue, par rapport au standard JPEG ?

(8pts) c) On utilise la table de quantification suivante

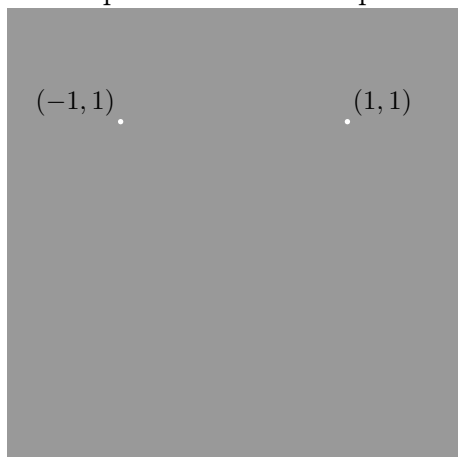
$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \\ 10 & 15 & 2000. \end{array}$$

Le coefficient q_{22} de la table correspond à 2000. Soit $f = (f_{ij})$ un carré 3×3 de tons de gris et $\alpha = (\alpha_{ij})$, ses coefficients dans la base des contrastes. Est-ce la quantification ℓ_{22} de α_{22} préserve une grande partie de l'information, comparativement aux autres coefficients ?

Question 4. Dessiner le squelette des régions suivantes en justifiant bien le dessin obtenu.

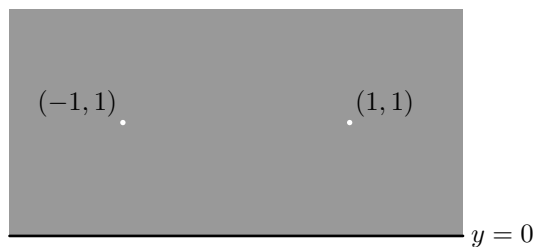
(10pts) a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 1), (1, 1)\}$, c'est-à-dire le plan duquel on retire deux points.

(15pts) b) $\{(x, y) \mid y \geq 0\} \setminus \{(-1, 1), (1, 1)\}$, c'est-à-dire le demi-plan duquel on retire deux points.
Indication. Pour justifier au b), utiliser le a) et l'exemple qu'on a fait en classe du demi-plan duquel on a retiré un point.



Région du 4a)

(La région ne se limite pas au rectangle, elle est infinie dans toutes les directions.)



Région du 4b)

(La région ne se limite pas au rectangle, elle est infinie vers le haut, la droite et la gauche.)