

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES – UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIGLE DU COURS : **MAT 2450**
 TITRE DU COURS : Mathématiques et technologie
 NOM DE LA PROFESSEURE : Christiane ROUSSEAU
 DATE DE L'EXAMEN : Mardi 19 avril Examen final —
 SESSION : Hiver 2016

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES :

- Manuel autorisé
- Calculatrice non programmable permise
- Répondre à toutes les questions
- Justifier toutes vos réponses

1. Le *contrôle de parité croisé* sert à détecter ou corriger des erreurs dans un bloc de $m \times n$ bits. On ajoute à la fin de chaque rangée un bit de parité horizontal (BPH) 0 ou 1 de telle sorte que chaque rangée contienne un nombre pair de 1. On rajoute de même un bit de parité vertical (BPV) 0 ou 1 à la fin de chaque colonne de telle sorte que chaque colonne contienne un nombre pair de 1. Donc, la somme de chaque rangée et chaque colonne du tableau est congrue à 0 modulo 2. Par exemple, si $m = 7$ et $n = 5$, on construit le tableau

	BPH	
	1 0 0 1 0 0 0	0
	1 0 0 0 1 0 1	1
	1 0 0 1 1 0 0	1
	0 0 0 1 1 0 0	0
	1 1 1 1 1 1 1	1
BPV	0 1 1 0 0 1 0	1

Remarquez qu'il y a quatre types de bits erronés :

- Le bit de parité horizontal de la rangée i (BPH_i) peut être incompatible avec la rangée i : BPH_i erroné.
- Le bit de parité vertical de la colonne j (BPV_j) peut être incompatible avec la colonne j : BPV_j erroné.
- Le bit du coin en bas à droite (BC) peut être horizontalement incompatible : BC horizontalement erroné.
- Le bit du coin en bas à droite (BC) peut être verticalement incompatible : BC verticalement erroné.

(10) (a) Montrer que ce code permet de corriger une erreur.

(5) (b) Vous recevez

	BPH	
	1 1 1 0 0 1 0	0
	0 1 0 0 1 1 1	1
	0 0 0 1 0 0 0	1
	0 1 1 1 0 1 0	0
	1 0 0 0 1 1 1	0
BPV	0 1 0 0 0 1 0	0

Ce tableau est-il compatible avec une seule erreur ? Si oui, corrigez l'erreur.

- (10) (c) Montrer que ce code détecte deux erreurs. (Cette question est un peu longue. Vous pouvez utiliser les abréviations suggérées plus haut pour ne pas perdre de temps dans l'écriture.)

2. On considère la Toile de la figure 1.

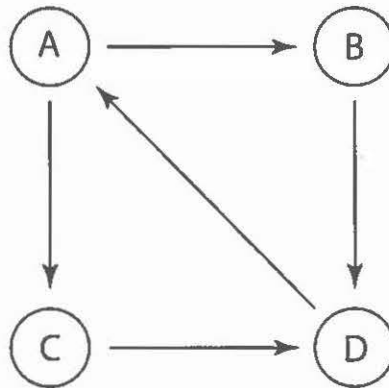


FIGURE 1 – La Toile de l'exercice 1(a) et (b)

- (3) (a) Si vous partez de la page A, avec quelle probabilité serez-vous en B après quatre clics ?
 (8) (b) Calculer la distribution stationnaire et donner l'ordre des pages.
 (4) (c) Pour augmenter son importance, le propriétaire de la page D crée une nouvelle page E qui n'a de lien qu'avec la page D comme sur la figure 2. Si vous partez de la page A, avec quelle probabilité serez-vous en A après cinq clics ?

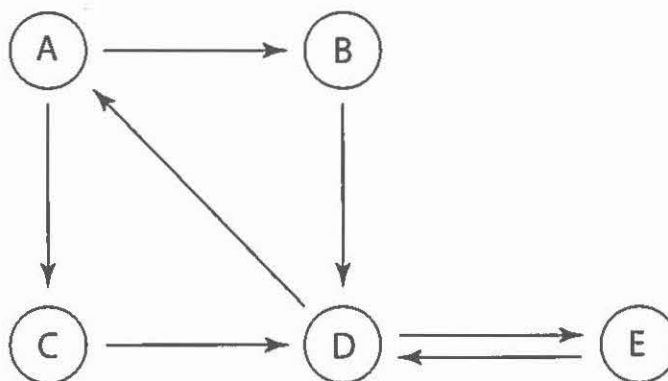


FIGURE 2 – La Toile de l'exercice 1(c)

- (10) (d) Calculer la nouvelle distribution stationnaire et vérifier si le propriétaire de la page D a réussi son pari.

3. Soit m un entier positif, et a et c deux entiers positifs inférieurs à m . On considère un générateur linéaire congruentiel de la forme

$$x_{n+1} = ax_n + c \pmod{m}.$$

- (4) (a) Montrer que la période de ce générateur est au maximum m .
- (3) (b) Le théorème de Hull-Dobell affirme que la période du générateur sera exactement m si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
 - (i) m et c sont relativement premiers ;
 - (ii) $a - 1$ est divisible par tous les facteurs premiers de m ;
 - (iii) $a - 1$ est divisible par 4 si m est divisible par 4.

On prend $m = 25$, $a = 6$ et $c = 3$. Montrer que le générateur associé est de pleine période 25.

- (5) (c) Prendre $x_0 = 1$ et générer une période de la suite.
- (3) (d) Montrer que la formule qui donne x_{n+2} en fonction de x_n est encore un générateur linéaire congruentiel.
- (3) (e) Dans le cas $m = 25$, $a = 6$ et $c = 3$, montrer que le générateur linéaire congruentiel donnant x_{n+2} en fonction de x_n est encore de pleine période 25.
- (6) (f) Dans le cas où m est pair, montrer que le générateur linéaire congruentiel donnant x_{n+2} en fonction de x_n n'est jamais de pleine période m .

4.

- (9) (a) On se donne la fonction f définie par

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ n - 2 & n \geq 2. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction est primitive réursive.

- (8) (b) Construire une machine de Turing qui calcule la fonction f et qui ramène le pointeur sur la première case.
- (8) (c) On se donne la fonction g définie par

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ pair}, \\ 1, & n \text{ impair}. \end{cases}$$

Construire une machine de Turing qui calcule la fonction g et qui ramène le pointeur sur la première case.
