

Analyse 2

Série 5

Séries de Fourier

Exercice 0.¹ Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$ ($1 \leq k \leq p$) et $b_m \in \mathbb{R}$ ($1 \leq m \leq q$).

a) Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^p a_k \right) \left(\sum_{m=1}^q b_m \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^q a_k b_m.$$

b) Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^p a_k + \sum_{m=1}^q b_m \right)^2 = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p a_k a_\ell + 2 \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^q a_k b_m + \sum_{m=1}^q \sum_{n=1}^q b_m b_n.$$

Exercice 1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π -périodique. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

Exercice 2. Calculer la série de Fourier des fonctions $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$

Solution. On utilisera le fait que $e^{in\pi} = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Ceci se voit du fait que

$$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n + i0 = (-1)^n.$$

a) Pour $c_0(x^3)$, on trouve 0, car la fonction est impaire.

Ensuite pour $c_n(x^3)$, on doit intégrer trois fois par partie. On utilise le tableau suivant

u	x^3	$-3x^2$	$6x$	-6	0
dv	e^{-inx}	$\frac{e^{-inx}}{-in}$	$\frac{e^{-inx}}{-n^2}$	$\frac{e^{-inx}}{in^3}$	$\frac{e^{-inx}}{n^4}$

¹ Le numéro 0 n'est pas un exercice sur les séries de Fourier. Par contre, il vous sera probablement utile de bien maîtriser la manipulation des sommes.

On obtient ensuite

$$\begin{aligned}
 2\pi c_n(x^3) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^3 e^{-inx} dx \\
 &= \frac{x^3 e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3x^2 e^{-inx}}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{6x e^{-inx}}{in^3} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{6e^{-inx}}{n^4} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{2i\pi^3(-1)^n}{n} + 0 - \frac{12i\pi(-1)^n}{n^3} - 0.
 \end{aligned}$$

La série de Fourier est donc

$$S(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{6i(-1)^n}{n^3} \right) e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} i \left(\frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^3} \right) (-1)^n e^{inx}.$$

Si on veut exprimer la série en terme de sinus (il n'y a pas de cosinus, puisque la fonction est impaire), on utilise $b_n = -2\Im c_n$. On trouve donc

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2 n^2 - 12}{n^3} \right) (-1)^{n+1} \sin(nx).$$

Exercice 3. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Étudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f .

Solution. On calcule d'abord les coefficients de la série de Fourier. On a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

car f est impaire.

Ensuite, pour $n \geq 1$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx = i \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}.$$

Puisque tous les c_n sont imaginaires pures, on déduit que

$$a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = 2\Im c_n = \frac{2}{n\pi} ((-1)^n - 1).$$

On obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n\pi} \sin(2nx).$$

On a vu à l'exercice 9b) de la série 4 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$. En fait, en répétant la démarche du 9b) avec $x = \frac{\pi}{2N}$, on obtient que la série ne converge pas uniformément.

Exercice 4. a) Montrer que pour $f, g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable, on a $c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g)$ et $c_n(Cf) = Cc_n(f)$, avec C est une constante, lorsque $c_n(f)$ représente $a_n(f)$ ou bien $b_n(f)$.

b) Montrer que si f est une constante, alors $c_n(f) = 0$ pour tout $n \neq 0$.

c) Calculer la série de Fourier de $f(x) = x + \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable telle que $f(-\pi) = f(\pi)$.

a) Montrer que

$$a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}.$$

b) Dédire que si f' est continûment dérivable et si $f'(-\pi) = f'(\pi)$, alors $a_n(f) = -\frac{a_n(f'')}{n^2}$ et $b_n(f) = -\frac{b_n(f'')}{n^2}$.

c) Dédire à partir du b) (sans faire appel au théorème de convergence du chapitre 6) que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$, si f vérifie les hypothèses du b).

Exercice 6. Soit $c \in (0, \pi)$ et $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq |x| \leq c, \\ 0, & \text{si } c < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

a) Calculer la série de Fourier de f .

b) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nc)}{n} = \frac{\pi - 2c}{2}.$$

Solution. a) D'abord, notons que f est paire, donc les coefficients b_n sont nuls. Calculons directement les a_n . (Dans ce cas, ce serait du travail superflu que de calculer les c_n .)

Pour les intégrales suivantes, il est suffisant de calculer sur l'intervalle $[0, c]$, puisque f est pair. On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^c dx = \frac{c}{\pi}.$$

Ensuite, on a

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^c \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^c = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(cn)}{n}.$$

La série est donc

$$\frac{c}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(cn)}{n} \cos(nx).$$

b) On voit que f est régulière par morceaux. Par le théorème de convergence, on a

$$\frac{c}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(cn)}{n} \cos(nx) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (-c, c) \\ 0, & \text{si } |x| \in (c, \pi] \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x \in \{-c, c\}. \end{cases}$$

En $x = c$, on trouve

$$\frac{\pi - 2c}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(cn) \cos(cn)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2cn)}{n}.$$

Exercice 7. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{(\pi^2 x - x^3)}{3}.$$

a) Déterminer la série de Fourier de f .

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. (Utilisez l'égalité de Parseval (numéro 11).)

Solution. On utilise le numéro 3a) pour voir que

$$c_n(f) = \frac{\pi^2}{3} c_n(x) - \frac{1}{3} c_n(x^3).$$

On connaît déjà $c_n(x)$ (exemple en classe) et $c_n(x^3)$ (numéro 1a). On a donc

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{\pi^2}{3} \frac{i(-1)^n}{n} - \frac{1}{3} i \left(\frac{\pi^2 n^2 + 6}{n^3} \right) (-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n i}{3} \left(\frac{\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2 - 6}{n^3} \right) \\ &= \frac{(-1)^n i}{3} \left(\frac{-6}{n^3} \right) \\ &= \frac{2i(-1)^{n+1}}{n^3} \end{aligned}$$

La série de Fourier est donc

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2i(-1)^{n+1}}{n^3} e^{inx}.$$

a) Par l'égalité de Parseval (exercice 8b), on a d'une part

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2 x - x^3}{3} \right)^2 dx = \frac{1}{18\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4 + x^6) dx = \frac{8\pi^6}{945}.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{4}{n^6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^6}.$$

En combinant, on conclut que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice 8[†]. Soit $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et 2π -périodique. On pose $h(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$.

- a) Montrer que $h(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$.
- b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(h) = a_n(f)a_n(g) - b_n(f)b_n(g) \quad \text{et} \quad b_n(h) = a_n(f)b_n(g) + b_n(f)a_n(g).$$

- c) Montrer que si f est dérivable et f' est régulière par morceaux et 2π -périodique, alors h est dérivable. Montrer que le résultat reste vrai si g vérifie les hypothèses à la place de f .

Exercice 9. On suppose qu'il existe une fonction intégrable $\delta: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et continue en 0, on ait $\int_{-\pi}^{\pi} f\delta = f(0)$. (Une telle fonction n'existe pas, mais on suppose que oui, pour l'exercice.)

- a) Calculer les coefficients de la série de Fourier de δ . Montrer que sa série de Fourier est

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} D_N.$$

- b) Cette série de Fourier converge-t-elle ?

c) Montrer que¹ pour toute fonction $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f D_N = f(0).$$

Indice. Inspirez-vous de la démonstration du théorème de convergence d'une série de Fourier.

Solution. a) Pour $n = 0$, on a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta = \frac{1}{2\pi}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} e^0 = \frac{1}{2\pi}.$$

b) La série diverge. En effet, on a vu en classe (ou exercice 8b), pour $x \neq 0$, que

$$\frac{1}{2\pi} D_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Il est clair que la limite diverge lorsque $N \rightarrow \infty$. Pour $x = 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi} D_N(x) = \frac{N}{\pi}$$

et on voit que cela diverge lorsque $N \rightarrow \infty$.

c) Il s'agit de reproduire la démonstration du théorème de convergence qu'on a vu en classe. C'est un peu plus simple, puisque l'hypothèse est plus forte. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f D_n - f(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f D_N - f(0) D_N) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - f(0)) D_N \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - f(0)) \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(0)) \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(f(x) - f(0))(e^{-ix} - 1)}{|e^{ix} - 1|^2} (e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}) dx. \quad (*) \end{aligned}$$

¹ C'est l'énoncé le plus proche de « $\frac{1}{\pi} D_N \rightarrow \delta$ lorsque $N \rightarrow \infty$ » que l'on puisse donner dans un cours d'analyse 2. En effet, on peut voir la conclusion du numéro comme une forme faible de convergence.

On pose $h(x) = \frac{(f(x)-f(0))(e^{-ix}-1)}{|e^{ix}-1|^2}$. Il suffit de voir que $\Re h$ et $\Im h$ sont intégrables. Le seul problème possible est en 0. La règle de l'Hôpital nous montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Re h = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - f(0))(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(f(x) - f(0)) \sin x + f'(x)(\cos x - 1)}{-2(\cos x - 1) \sin x + 2 \sin x \cos x} = 0$$

et que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Im h = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(f(x) - f(0)) \sin x}{(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(f(x) - f(0)) \cos x - f'(x) \sin x}{-2(\cos x - 1) \sin x + 2 \sin x \cos x} = -f'(0).$$

(Remarquez que l'on aurait pu directement faire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{e^{ix} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{ie^{ix}} = \frac{f'(0)}{i} = -if'(0),$$

ce qui donne bien entendu la même chose.)

Puisque h est intégrable, l'équation (*) devient

$$c_{-N-1}(\Re h) - c_N(\Re h) + c_{-N-1}(\Im h) - c_N(\Im h).$$

On sait que ces quantités tendent vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

Exercice 10. (Densité des polynômes trigonométriques). Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et régulière par morceaux. Montrer que si $f(-\pi) = f(\pi)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique s_n tel que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - s_n)^2 < \varepsilon.$$

(Cet énoncé est vrai sans l'hypothèse de la régularité par morceaux, mais on ne peut pas le montrer dans ce cours.)

Exercice 11. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et régulière par morceaux telle que $f(-\pi) = f(\pi)$.

a) Soit s_n les sommes partielles de la série de Fourier de f . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (s_n - f)^2 = 0.$$

b) (Égalité de Parseval). Montrer que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

Indice. Lorsque l'on développe, on obtient $(f - s_n)^2 = f^2 - 2fs_n + s_n^2$. Étudiez l'intégrale de $-\pi$ à π de chaque partie séparément.

Solution. a) On sait que $s_n \rightarrow f$ uniformément, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que si $n \geq N$, alors

$$(s_n - f)^2 < |s_n - f| < 1.$$

Il s'ensuit que $(s_n - f)^2 \rightarrow 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. On peut ainsi échanger la limite avec l'intégrale et obtenir la conclusion.

b) D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \leq n} \sum_{|m| \leq n} c_k c_m e^{i(k+m)x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \sum_{|m| \leq n} c_k c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+k)x} dx \quad (\text{car les séries conv. unif.}) \\
&= \sum_{|k| \leq n} c_k c_{-k} \\
&= \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a également

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n f &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} f \\
&= \sum_{|k| \leq n} c_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e^{ikx} \\
&= \sum_{|k| \leq n} c_k c_{-k} \\
&= \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant les deux équations précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f - s_n)^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^2 - 2fs_n + s_n^2) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Exercice 12. Prologer $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ en une fonction $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 2π -périodique et dont la série de Fourier est une série en cosinus.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = x^3$

Exercice 13. Soit $a < b$.

- a) Soit $u: [-\pi, \pi] \rightarrow [a, b]$ et $v: [a, b] \rightarrow [-\pi, \pi]$ deux fonctions affines de la forme $u(t) = \alpha t + \beta$ et $v(x) = \gamma x + \delta$, avec $\alpha, \gamma > 0$. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et montrer que $u^{-1} = v$.
- b) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. On définit $g := f \circ u: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$a_n(g) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(nv(x)) dx.$$

De même, constater que

$$b_n(g) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin(nv(x)) dx.$$

- c) Déterminer la limite de la série trigonométrique

$$\frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \cos(nv(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(g) \sin(nv(x)). \quad (*)$$

- d) Montrer que si f est continue et si $f(a) = f(b)$, alors la série $(*)$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Remarque. Cet exercice démontre le théorème suivant.

Théorème. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. Alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(2x - b - a)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(2x - b - a)\right)$$

converge vers

$$\begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{si } x \in (a, b), \\ \frac{f(a^+) + f(b^-)}{2}, & \text{si } x \in \{a, b\}, \end{cases}$$

où

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(2x - b - a)\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(2x - b - a)\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, si f est continue et si $f(a) = f(b)$, alors la série converge uniformément vers f sur $[a, b]$.