

Analyse 2

Série 3

Séries entières

Exercice 1. Montrer que le rayon de convergence d'une série entière est unique.

Exercice 2. Montrer que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Exercice 3. Montrer que la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

a pour rayon de convergence $R = \infty$, mais que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes. Déterminer le rayon de convergence.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Exercice 5. Soit deux séries entières

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

de rayon de convergence respectif $R > 0$ et $Q > 0$. Montrer que le produit fg est une série entière de rayon de convergence au moins $\min\{R, Q\}$.

Indice. Évoquez le théorème du produit de Cauchy vu en Analyse 1.

Exercice 6. Trouver une série entière centrée en 0 pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = \int_1^2 \frac{dt}{t-x}$

b) La solution de $y' = y$, avec $y(0) = 1$. (*Indice.* Supposez qu'il existe une solution de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trouvez les a_n et montrez que la série a un rayon de convergence $R > 0$.)

c) $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$

Exercice 7. Soit (a_n) la suite de Fibonacci : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

- a) Montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$.
- b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est au moins $\frac{1}{2}$.
- c) Montrer que $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = x$ et donc que $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.
- d) En utilisant les fractions partielles, trouver une autre expression pour la série $f(x)$.
- e) Dédire que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 8. (Caractérisation des fonctions analytiques)

- a) Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour tout compact $K \subseteq (-R, R)$, il existe $M \geq 0$ et $C \geq 0$ tels que pour tout $x \in K$, on a

$$|f^{(k)}(x)| \leq MC^k k!. \quad (*)$$

- b) Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que si pour tout compact $K \subseteq I$, $(*)$ est vérifiée, alors f est analytique.

Exercice 9. Montrer que si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont analytiques, alors fg est analytique.

Indice. Utiliser la formule de Leibniz $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (et la montrer, si cela n'a pas déjà été fait) et utiliser l'exercice 8.

Exercice 10. Suite récurrente linéaire. Soit (a_n) une suite récurrente linéaire de la forme $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n$ pour tout $n \geq 0$. On appelle la *fonction génératrice* de (a_n) la série formelle

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

On pose $p_n(x) = \sum_{0 \leq \ell \leq n} a_\ell x^\ell$, la somme partielle, et $p_{-1}(x) = 0$ pour tout x .

- a) Montrer que pour tout $\ell, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+\ell} x^{n+q} = x^{q-\ell} (f(x) - p_{\ell-1}(x)).$$

- b) Montrer que

$$f(x) - c_1 x f(x) - \dots - c_k x^k f(x) = p_{k-1}(x) - c_1 x p_{k-2}(x) - \dots - c_{k-1} x^{k-1} p_0(x).$$

- c) Dédire qu'il existe des polynômes P, Q tels que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.