

Analyse 2

Série 1

Intégration (solutionnaire)

1. Définition de l'intégrale de Riemann

Exercice 1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

Solution. Avant de faire la solution, quelques rappels sur le supremum et l'infimum. Le supremum, s'il existe, est le plus petit majorant. Ainsi, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble majoré et que l'on pose $S = \sup_Q S(f, Q)$, cela veut dire que S est un majorant de E et que si S' est un autre majorant de E , alors $S \leq S'$.

Un truc souvent utile est le suivant. Pour $\varepsilon > 0$, on sait que $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E , car $S - \varepsilon < S$ et S est le plus petit majorant. Cela veut dire qu'il existe $x \in E$ tel que $S - \varepsilon < x \leq S$, car autrement $S - \varepsilon$ serait un majorant, une contradiction.

Les mêmes idées s'appliquent à l'infimum.

$\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Par les propriétés du supremum, il existe une partition Q de $[a, b]$ telle que $I(f, Q) \geq \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$. De même, par les propriétés de l'infimum, il existe une partition R de $[a, b]$ telle que $S(f, R) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $P = Q \cup R$. Par le lemme vu en classe, on a $I(f, P) \geq I(f, Q)$ et $S(f, P) \leq S(f, R)$. En combinant les inégalités du paragraphe précédent, on obtient

$$S(f, P) - I(f, P) \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f + \varepsilon = \varepsilon,$$

car $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ par hypothèse.

$\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$. On a donc $S(f, P) < I(f, P) + \varepsilon$. Comme l'intégrale supérieure est l'infimum des $S(f, Q)$ sur les partitions Q , il suit que $\overline{\int_a^b} f \leq S(f, P)$. De façon similaire, on a $\underline{\int_a^b} f \geq I(f, P)$. On a donc

$$\overline{\int_a^b} f \leq S(f, P) \leq I(f, P) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en découle que $\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$, d'où f est intégrable.

Exercice 2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit (P_n) une suite de partitions de $[a, b]$. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $I(f, P_n) \rightarrow L$ et $S(f, P_n) \rightarrow L$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f = L$.

Exercice 3. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe une suite de partitions (P_n) de $[a, b]$ telle que $S(f, P_n) - I(f, P_n) \rightarrow 0$.

- a) On pose $Q_n = P_1 \cup \dots \cup P_n$. Montrer que Q_n est une partition de $[a, b]$ et que la suite $(I(f, Q_n))$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- b) Montrer que $S(f, Q_n) - I(f, Q_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- c) Montrer que f est intégrable et que $\int_a^b f = L$.

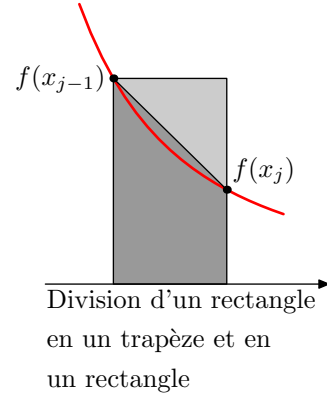
Exercice 4. À l'aide de l'exercice 2, montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle $I = [a, b]$ indiqué en utilisant la suite de partitions donnée par $P_n = \{a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, a + (n-1)\Delta x, b\}$, où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

- a) $f(x) = x$ sur $[1, 2]$ $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0, 1]$
- c)† $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1, 2]$

Solution. c) On note les éléments de P_n par $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On pose aussi $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f$ et $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f$. Puisque f est décroissante, il suit que $m_j = f(x_j)$ et $M_j = f(x_{j-1})$.

On peut séparer l'aire du rectangle $M_j(x_j - x_{j-1})$ en deux parties comme sur la figure :

$$\begin{aligned} M_j(x_j - x_{j-1}) &= f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))(x_j - x_{j-1})}_{\text{aire du trapèze}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x_{j-1}) - f(x_j))(x_j - x_{j-1})}_{\text{aire du triangle}} \end{aligned}$$



Regardons à l'aire du triangle. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_{j-1} \in (x_{j-1}, x_j)$ telle que

$$\begin{aligned} (f(x_{j-1}) - f(x_j))(x_j - x_{j-1}) &= -f'(\xi_{j-1})(x_j - x_{j-1})^2 \\ &= \frac{2}{\xi_{j-1}^3}(x_j - x_{j-1})^2 \\ &\leq 2(x_j - x_{j-1})^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{1}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))(x_j - x_{j-1}) + 2(x_j - x_{j-1})^2.$$

En réarrangeant (et en se rappelant que $M_j = f(x_{j-1})$ et $m_j = f(x_j)$), on trouve

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \leq m_j(x_j - x_{j-1}) + 2(x_j - x_{j-1})^2.$$

Maintenant, on utilise l'équation $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ et on prend la somme de $j = 1$ à n :

$$S(f, P) \leq I(f, P) + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2} = I(f, P) + \frac{2}{n}.$$

Ceci montre que $0 \leq S(f, P) - I(f, P) \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Par le numéro 2, $I(f, P)$ converge vers une valeur $L \in \mathbb{R}$ et par le numéro 1, f est intégrable et $\int_1^2 f = L$.

Remarque. Malheureusement, cette approche ne permet pas de calculer la valeur de l'intégrale, seulement de montrer que f est intégrable.

Exercice 5. Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables à l'aide de la définition.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0, 1]$

b) $f(x) = x + 2$ sur $[1, 2]$

c) $f(x) = 0$ sur $[0, \infty)$

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases} \quad \text{sur } [0, 1]$

2. Propriétés de l'intégrale

Exercice 6. Montrer les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f est bornée sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

b) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b cf = c \left(\int_a^b f \right).$$

c) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Exercice 7. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $|f|$ est intégrable.

Suggestion. Montrez d'abord que $\sup_A |f| - \inf_A |f| \leq \sup_A f - \inf_A f$ (p.ex. vous pourriez utiliser $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$.)

b) Montrer que f^2 est intégrable (f au carré).

Suggestion. Montrez d'abord qu'il existe $R \geq 0$ tel que $M_j^2 - m_j^2 \leq R(M_j - m_j)$, où $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} |f|$ et $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} |f|$. Vous devrez également montrer que $\sup_A(f^2) = (\sup_A |f|)^2$, (et de même pour inf), en général.

Solution.

a) On a $\sup_A |f| - \inf_A |f| \leq |f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq \sup_A f - \inf_A f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit P une partition de $[a, b]$ telle que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$. On pose

$$\begin{aligned} M_j &= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f & \overline{M}_j &= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} |f| \\ m_j &= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f & \overline{m}_j &= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} |f| \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} S(|f|, P) - I(|f|, P) &= \sum_{j=1}^n (\overline{M}_j - \overline{m}_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= S(f, P) - I(f, P) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Par l'exercice 1, on obtient que $|f|$ est intégrable.

b) Comme f est intégrable, il suit que $|f|$ est intégrable (par a), donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $S(|f|, P) - I(|f|, P) < \frac{\varepsilon}{R+1}$.

On tient pour acquis l'indice et on utilise sa notation. On a

$$\begin{aligned} S(f^2, P) - I(f^2, P) &\leq \sum_{j=1}^n (M_j^2 - m_j^2)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n R(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= R(S(|f|, P) - I(|f|, P)) \\ &\leq R \frac{\varepsilon}{R+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que f^2 est intégrable par le numéro 1.

Montrons maintenant qu'il existe $R \geq 0$ tel que $M_j^2 - m_j^2 \leq R(M_j - m_j)$. On a $M_j^2 - m_j^2 = (M_j + m_j)(M_j - m_j) \leq (M + m)(M_j - m_j)$, où M est le supremum de $|f|$ sur $[a, b]$ et m est l'infimum de $|f|$ sur $[a, b]$. Il suffit de prendre $R = M + m$.

Enfin, montrons que $\sup_A(f^2) = (\sup_A |f|)^2$. On pose $M = \sup_A |f|$ et $N = \sup_A(f^2)$. D'une part, on a $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in A$ et donc $f(x)^2 \leq M^2$ pour tout $x \in A$, donc M^2 est un majorant de f^2 . Il suit que $N \leq M^2$.

D'autre part, on a $f(x)^2 \leq N$ pour tout $x \in A$, donc $|f(x)| \leq \sqrt{N}$ pour tout $x \in A$. Il suit que $\sqrt{N}$ est un majorant de $|f|$, donc $M \leq \sqrt{N}$, c'est-à-dire $M^2 \leq N$. On a bien $M^2 = N$ comme voulu.

Exercice 8. (Inégalité de Schwarz)

- a) Soit le polynôme de degré deux $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Montrer que si $p(x) \geq 0$ pour tout x , alors son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou nul.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\Delta > 0$. On pose

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} p(x_0) &= 0 \\ p'(x_0) &= \sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

Ainsi, x_0 n'est pas un minimum local, donc il existe forcément un y tel que $p(y) < p(x_0) = 0$, ce qui est une contradiction.

- b) Soit $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

Indice. Considérer le polynôme $p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt$.

Solution. On suppose que $\int_a^b g^2 \neq 0$. On considère

$$p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt = \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \lambda^2 \int_a^b g^2.$$

Il est clair que $p(\lambda) \geq 0$ pour tout λ . Ainsi, par le a), on a

$$0 \geq \Delta = 4 \left(\int_a^b fg \right)^2 - 4 \int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

Si $\int_a^b g^2 = 0$, alors on a $p(\lambda) = \lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est seulement possible si $\int_a^b fg = 0$.

Exercice 9. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f \equiv 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$). Montrer que si f est seulement intégrable, alors l'énoncé est faux.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe x_0 tel que, sans perte de généralité, $f(x_0) > 0$. Puisque f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (exercice d'analyse 1). On a ainsi

$$\int_a^b f^2 \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f^2 > \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} 0 = 0,$$

ce qui est une contradiction.

Si f n'est pas continue, il suffit de prendre la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 10. Donner un exemple d'une fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ non intégrable, mais telle que $|f|$ est intégrable.

Solution. Il suffit de prendre

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On voit que $|f(x)| = 1$ pour tout x .

Exercice 11. (Théorème de la moyenne) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Soit m l'infimum de f et M , son suprémum. Montrer que

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

b) On suppose, de plus, que f est continue. Dédurre alors qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

Solution. a) Soit la partition $P = \{a, b\}$. On a

$$I(f, P) = m(b-a) \leq \int_a^b f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b f} \leq S(f, P) = M(b-a).$$

b) Puisque f est continue, il existe $y, z \in [a, b]$ tels que $f(y) = m$ et $f(z) = M$. L'inégalité du a) s'écrit donc

$$f(y) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq f(z).$$

On voit maintenant que l'on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, il existe c entre y et z (donc dans $[a, b]$) tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

3. Théorème fondamental du calcul

Exercice 12. Soit h une fonction continue et soit f, g deux fonctions bornées et dérivables. Calculer la dérivée de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt.$$

Solution. On pose $G(x) = \int_a^x h$. Par le TFC1, G est dérivable. De plus, comme f et g sont dérivables, il suit que $G \circ f$ et $G \circ g$ sont dérivables. On a alors que

$$F(x) = G(f(x)) - G(g(x))$$

est dérivable, donc par la dérivation en chaîne, on a

$$F'(x) = G'(f(x))f'(x) - G'(g(x))g'(x) = h(f(x))f'(x) - h(g(x))g'(x).$$

Exercice 13. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$.

a) Montrer que F est continue sur $[a, b]$.

Remarque. Une fonction intégrable au sens de Riemann est nécessairement bornée.

b) La fonction de Heaviside est la fonction

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $H(x) = \int_{-1}^x f$.

c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, on a $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$.

d) Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sqrt{x} = \int_0^x f$.

Exercice 14. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$. Montrer que si f est continue en $y \in [a, b]$, alors F est dérivable en y .

Exercice 15. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On admet qu'alors l'intégrale de f peut s'écrire comme une somme de Riemann de la forme

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} e^{k/n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

d) Trouver une fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas intégrable, mais dont la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$$

converge.

Solution. d) Il suffit de prendre

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Exercice 16. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

Solution. a) On pose $g(x) = \frac{1}{x}$. On prend la partition $P = \{n, n+1\}$ de l'intervalle $[n, n+1]$. On a alors

$$I(g, P) \leq \int_n^{n+1} g \leq S(g, P).$$

D'une part, on a

$$I(g, P) = \inf_{[n, n+1]} g = \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, on a

$$S(g, P) = \sup_{[n, n+1]} g = \frac{1}{n}.$$

L'inégalité s'ensuit.

La deuxième inégalité découle de la première en écrivant

$$\int_1^n g = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} g.$$

b) On pose $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - f(n)$$

converge. Que pouvez-vous dire sur la valeur de la limite ?

Solution. Par le a), on sait que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$, donc la suite est bornée. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
 u_n - u_{n+1} &= f(n+1) - f(n) - \frac{1}{n+1} \\
 &= f'(\xi)(n+1-n) - \frac{1}{n+1} \quad \text{par le thm. des acc. finis} \\
 &= \frac{1}{\xi} - \frac{1}{n+1} \quad \text{par le TFC1} \\
 &\geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{car } \xi \in (n, n+1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La suite est donc décroissante. Une suite minorée et décroissante converge, donc (u_n) converge. De plus, puisque $\frac{1}{n} \leq u_n$, on sait que la limite est positive.

Il est possible d'approximer la limite davantage, bien que ce ne soit pas la méthode la plus efficace. Soit γ la limite de la suite. Comme la suite est décroissante, on sait que $0 \leq \gamma \leq u_n$ pour tout n . On peut approcher la valeur de u_2 comme suit. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $P = \{1, 1 + \frac{1}{m}, \dots, 1 + \frac{m-1}{m}, 2\}$ une subdivision de $[1, 2]$. On a

$$\begin{aligned}
 f(2) &= \int_1^2 \frac{dx}{x} \\
 &\geq I(f, P) \\
 &= \sum_{j=1}^m \inf_{[1+\frac{j-1}{m}, 1+\frac{j}{m}]} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{j}{m} - 1 - \frac{j-1}{m} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 + \frac{j}{m}} \frac{1}{m} \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{m}{m+j} \frac{1}{m} \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{m+j}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2} - f(2) \leq \frac{3}{2} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{m+j}.$$

Pour $m = 2$, on trouve $u_2 \leq \frac{11}{12}$ et pour $m = 3$, $u_2 \leq \frac{53}{60}$. Bref, on conclut que

$$0 \leq \gamma \leq u_2 \leq \frac{53}{60}.$$

On peut ainsi obtenir des approximations de plus en plus fines des u_n . Cependant, d'autres méthodes plus performantes sont utilisées pour s'approcher de γ , puisque la suite (u_n) converge vers γ plutôt lentement.

4. Techniques d'intégration

Exercice 17. Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

- | | |
|--|--------------------------------|
| a) $\int \frac{dt}{\cotan(3t)}$ | b) $\int \log x dx$ |
| c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$ | d) $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx$ |
| e) $\int \frac{dt}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$ | f) $\int x \arctan x dx$ |
| g) $\int \frac{du}{1+u^3}$ | |

Solution. c) On complète le carré. On a

$$\begin{aligned}
 2 - 3x - 4x^2 &= -4\left(x^2 + \frac{3}{4}x\right) + 2 \\
 &= -4\left(x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64}\right) + 2 + \frac{9}{16} \\
 &= -4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{41}{16} \\
 &= 4\left(\frac{41}{64} - \left(x + \frac{3}{8}\right)^2\right).
 \end{aligned}$$

On vise à obtenir un arcsin. On a

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} &= \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{41}{64} - \left(x + \frac{3}{8}\right)^2}} & u &= x + \frac{3}{8} \\
 & & du &= dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\frac{\sqrt{41}}{8} \sqrt{1 - \frac{64}{41}u^2}} \\
 &= \frac{8}{2\sqrt{41}} \int \frac{8}{\sqrt{41}} \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} & v &= \frac{8}{\sqrt{41}}u \\
 & & \frac{\sqrt{41}}{8}dv &= du \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin v + C \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{8x+24}{\sqrt{41}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

d) La division de polynômes nous donne

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}.$$

Ensuite, on utilise les fractions partielles :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{A(x^2+x+1) + Bx(x-1)C(x-1)}{x^3-1} \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(A-B+C) + (A-C)}{x^3-1}.\end{aligned}$$

On trouve les équations

$$A+B=1, \quad A-B+C=0, \quad A-C=0,$$

avec la solution

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

On trouve donc pour l'intégrale

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \log |x-1| + \frac{1}{3} \log |x^2+x+1| + C.$$

e) On transforme l'intégrande en tangente et en sécante. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{2 \sin^2 t + 3 \cos^2 t} &= \int \frac{\sec^2 t dt}{2 \tan^2 t + 3} \\ &= \int \frac{du}{2u^2 + 3} & u = \tan x \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{\frac{2}{3}u^2 + 1} & du = \sec^2 x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \int \frac{dv}{v^2 + 1} & v = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \arctan v + C & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}dv = du \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tan x \right).\end{aligned}$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx$

b) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^{1/3}} \right) dx$

$$\text{c) } \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \log^3 t}$$

$$\text{d) } \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

$$\text{e) } \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$\text{f) } \int_1^2 \frac{ds}{s^2 \sqrt{1 + s^2}}$$

Solution. d) Par essai-erreur, on trouve que -1 est un zéro de $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. On divise ce polynôme par $x + 1$ pour obtenir

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1).$$

On voit maintenant que -1 est encore une racine, donc on trouve

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + 1).$$

On utilise maintenant les fractions partielles. On trouve

$$\frac{x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C + Dx}{x^2 + 1}.$$

Ceci mène à

$$\begin{aligned} x &= A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + C(x + 1)^2 + Dx(x + 1)^2 \\ &= x^3(A + D) + x^2(A + B + C + 2D) + x(A + 2C + D) + (A + B + C). \end{aligned}$$

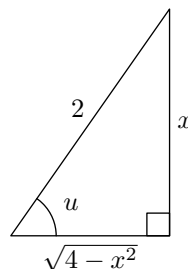
On trouve que la solution est $A = D = 0$, $C = \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{2}$.

Maintenant, on intègre facilement par

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x + 1} + \arctan x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

e) L'expression $\sqrt{4 - x^2}$ suggère le triangle et les égalités suivants

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \\ \sin u &= \frac{x}{2} \\ \cos u \, du &= \frac{dx}{2}. \end{aligned}$$



L'intégrale indéfinie devient

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int (4 \sin^2 u) (2 \cos u) (2 \cos u du) \\ &= 16 \int \sin^2 u \cos^2 u du.\end{aligned}$$

On pose $I = \int \sin^2 u \cos^2 u du$. Par intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}I &= \frac{\cos u \sin^3 u}{3} + \frac{1}{3} \int \sin^4 u du & w &= \cos u & dv &= \sin^2 u \cos u du \\ & & dw &= -\sin u du & v &= \frac{\sin^3 u}{3} \\ &= \frac{\cos u \sin^3 u}{3} + \frac{1}{3} \int (1 - \cos^2 u) \sin^2 u du \\ &= \frac{\cos u \sin^3 u}{3} - \frac{\sin u \cos u}{6} + \frac{u}{6} - \frac{I}{3} + C.\end{aligned}$$

Il est suffisant de considérer la primitive avec $C = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}I &= \frac{\cos u \sin^3 u}{4} - \frac{\sin u \cos u}{8} + \frac{u}{8} \\ &= \frac{x^3 \sqrt{4-x^2}}{64} - \frac{x \sqrt{4-x^2}}{32} + \frac{1}{8} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Enfin, pour évaluer l'intégrale définie, on a

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = 16I = \left[\frac{x^3 \sqrt{4-x^2}}{4} - \frac{x \sqrt{4-x^2}}{2} + 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2 = 2 \arcsin(1) = \pi.$$

f) On peut résoudre l'intégrale par deux substitutions :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{ds}{s^2 \sqrt{s^2+1}} &= - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}} & u &= \frac{1}{s} \\ & & du &= -\frac{1}{s^2} ds \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u du}{\sqrt{1+u^2}} \\ &= \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{dv}{2\sqrt{v}} & v &= 1+u^2 \\ & & dv &= 2u du \\ &= \sqrt{v} \Big|_{\frac{5}{4}}^2 \\ &= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 19. Soit $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- a) Montrer que si f est paire ($f(-x) = f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
- b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 0$.
- c) Calculer les intégrales suivantes.

$$i) \int_{-1}^2 x|x| dx \qquad ii) \int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x dx \qquad iii) \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

Solution. *i)* L'intégrande est impair, donc on a

$$\int_{-1}^2 x|x| dx = \left(\int_{-1}^1 + \int_1^2 \right) x|x| dx = 0 + \int_1^2 x|x| dx.$$

Sur l'intervalle $[1, 2]$, la valeur absolue n'est plus utile, on a donc

$$\int_1^2 x|x| dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

ii) L'intégrande est impair. On utilise les identités trigonométriques des fonctions sinus et cosinus pour montrer que l'intégrale est nulle. Avec $u = x - \pi$, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(u + \pi) \cos^n(u + \pi) du = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 u \cos^n u du = 0.$$

iii) L'intégrande est impair, donc l'intégrale est nulle

5. Intégrales impropres

Exercice 20'. Trouver un exemple d'une fonction $f: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ continue et positive telle que $\int_a^\infty f$ converge, mais $\lim_{x \rightarrow \infty} f \neq 0$.

Solution. Soit $g(x)$ la fonction

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une fonction continue et positive en forme de triangle sur l'intervalle $[-1, 1]$. Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{-1}^1 g = 1$.

Pour $n \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, on définit f par $f(x) = g(n^2(x - n))$ si $x \in [n - 1, n + 1]$. Sur $[n - 1, n + 1]$, on a

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow g(n^2(x - n)) \neq 0 \Leftrightarrow n^2|x - n| < 1 \Leftrightarrow |x - n| < \frac{1}{n^2}.$$

On voit également que $f(n) = g(0) = 1$ et $\int_{n-1}^{n+1} f = \frac{2}{n^2}$, car sur $[n-1, n+1]$, le graphe de f est un triangle de base $\frac{2}{n^2}$ et de hauteur 1.

Enfin, on trouve

$$\int_{-1}^{\infty} f = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \int_{n-1}^{n+1} f = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

Comme $f(2k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il suit que $f \not\rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Exercice 20. Soit $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

- Montrer que si $\int_a^{\infty} |f|$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si f est un $O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$, alors $\int_a^{\infty} f$ converge.
- Trouver une fonction f telle que $\int_a^{\infty} f$ converge, mais pour laquelle il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que f est un $O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$.

Solution. a) Faisons d'abord le cas où $f \geq 0$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $f \not\rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Ainsi, il existe une suite (x_n) telle que $x_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $f(x_n) \not\rightarrow 0$. Quitte à prendre une sous-suite de (x_n) , on peut supposer que (x_n) est strictement croissante et $x_{n+1} > x_n + 2$.

L'idée est que, comme f est uniformément continue, pour chaque point où $f(x) \geq \varepsilon$, il existe un intervalle de longueur au moins 2δ tel que $f(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ sur cet intervalle. Ainsi, près de chacun de ces points, il y a au moins $\varepsilon\delta$ d'aire.

Puisque $f(x_n) \not\rightarrow 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \geq N$ tel que $f(x_{n_k}) \geq \varepsilon$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On peut supposer que $\delta < \frac{1}{2}$.

Pour x tel que $|x - x_{n_k}| < \delta < \frac{1}{2}$, on a

$$|f(x) - f(x_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(x_{n_k}) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x).$$

Ainsi, on a $\int_{[x_{n_k}-\delta, x_{n_k}+\delta]} f \geq \frac{\varepsilon}{2}(2\delta) = \varepsilon\delta$. Comme $x_{n+1} > x_n + 2$ et que $\delta < \frac{1}{2}$, il suit que $[x_{n_k} - \delta, x_{n_k} + \delta] \cap [x_{n_{k+1}} - \delta, x_{n_{k+1}} + \delta] = \emptyset$. On peut donc écrire

$$\int_{a+\delta}^{x_{n_k}+\delta} f \geq \sum_{j=1}^k \int_{[x_{n_j}-\delta, x_{n_j}+\delta]} f \geq \sum_{j=1}^k \varepsilon\delta = k\varepsilon\delta.$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, le côté droite tend vers l'infini, donc le côté gauche aussi, ce qui est une contradiction.

Pour le cas général, on pose $g = |f|$. Alors $g \geq 0$ et $\int_a^{\infty} |g| = \int_a^{\infty} g = \int_a^{\infty} |f|$ converge, donc $g \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, c'est-à-dire $|f| \rightarrow 0$. Or, on sait (analyse 1) que $|f| \rightarrow 0$ si et seulement si $f \rightarrow 0$.

Exercice 21. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans trouver la valeur).

$$\text{a) } \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\text{b) } \int_0^\infty \sin t \, dt$$

$$\text{c) } \int_0^\infty \frac{\sin x}{1 + \cos x + e^x} dx$$

$$\text{d) } \int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx, \, a \neq 0 \text{ et } m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{e) } \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx$$

$$\text{f) } \int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{1-x} dx$$

Solution. a) On peut étudier la convergence de $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$, puisque celle-ci converge si et seulement si l'intégrale de départ converge. Ainsi, puisque $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} x^2 \geq x &\Rightarrow -x^2 \leq -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad (\text{car exp est croissante}). \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-M} - e^{-1} = e^{-1}.$$

On a donc $\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx < \infty$.

b) L'intégrale diverge, car on a

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \sin t \, dt = \lim_{M \rightarrow \infty} (-\cos(M) + \cos(0))$$

et cette limite diverge. (Exercice d'analyse 1.)

c) L'intégrale converge, puisque

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x + e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

et que $\int_0^\infty e^{-x} dx$ converge.

d) Le dénumérateur est non nul pour tout x , donc le seul problème se trouve à l'infini. On étudie l'intégrale sur l'intervalle $[1, \infty)$, puisque l'intégrande est intégrable sur $[0, 1]$. Pour $x \geq 1$, on a

$$\frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{M} + 1 \right) = 1.$$

On conclut que l'intégrale du départ converge.

e) Il y a deux problèmes, lorsque $x \rightarrow 0$ et lorsque $x \rightarrow \infty$. Ainsi, on sépare l'intégrale sur $[0, 1]$ et sur $[1, \infty)$ et on analyse chacune séparément.

Sur $[1, \infty)$, on a $x^2 \leq e^x$ (montrez-le!), donc $x \leq e^{x/2}$. Ainsi, on obtient

$$\frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{e^{x/2}}{e^x - \frac{1}{2}e^x} = 2e^{-x}.$$

On sait que $\int_1^\infty e^{-x} dx$ converge, donc l'intégrale de départ converge sur $[1, \infty)$.

Sur $[0, 1)$, l'intégrale converge, car la limite suivante existe :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(1 + x + o(x)) - 1} && (\text{dév. limités de } e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + o(1)} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ se prolonge comme une fonction continue sur $[0, 1]$, ce qui veut dire qu'elle est intégrable.

f) Le problème survient lorsque $x \rightarrow 1$, donc on considère l'intégrale sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a

$$\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x} \geq \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+1}}{1-x}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^y \frac{dx}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 1^-} -\log(1-y) + \log(\frac{1}{2}) = \infty.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\sqrt{x+1}}{1-x} dx \geq \sqrt{\frac{3}{8}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x} = \infty.$$

On conclut que l'intégrale impropre diverge.

Exercice 22. Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Si elle converge, la calculer. Si elle diverge, calculer la valeur principale si possible.

a) $\int_{-1}^1 \frac{\log|x|}{x} dx$

b) $\int_0^\pi \tan x dx$

c) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Solution. a) L'intégrale impropre diverge. La valeur principale vaut 0, puisque l'intégrande est impair et qu'on intègre sur $[-1, 1]$.

c) On a

$$\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \sqrt{3} - \sqrt{\varepsilon}.$$

L'intégrale impropre converge et elle vaut $\sqrt{3}$.

Exercice 23. (Fonction gamma)

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ converge pour tout $x > 0$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ pour $x > 0$.

- b) Montrer que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.
- c) Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ lorsque n est un nombre naturel.
- d) Étendre le domaine de définition de Γ sur $\{x < 0\} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- e) Montrer que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

la fameuse *intégrale de Gauss*.

Exercices supplémentaires

Cette section des exercices est optionnelle.

Définition. 1. Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle. Une *partition* (ou subdivision) P de R en rectangles est un ensemble de la forme $P = A \times D$, où $A = \{x_0, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a, b]$ et $D = \{y_0, \dots, y_m\}$ est une partition de $[c, d]$.

2. Soit $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \inf_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

3. On définit l'intégrale inférieure et l'intégrale supérieure par

$$\underline{\int \int_R} f = \sup_P I(f, P) \quad \text{et} \quad \overline{\int \int_R} f = \inf_P S(f, P),$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les partitions en rectangles de $[a, b] \times [c, d]$.

4. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\underline{\int \int_R} f = \overline{\int \int_R} f.$$

On note la quantité commune $\int \int_R f$ (ou $\int \int_R f(x, y) dA$, où dA désigne un *élément d'aire*).

Exercice 24. (Théorème de Fubini, version pour intégrale de Riemann) Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ et $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de la question est de montrer que

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (\dagger)$$

a) Soit $A = [a, b]$ et $B = [c, d]$ et soit $g: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\sup_{A \times B} g(x, y) = \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} g(x, y).$$

b) Montrer l'équation $(\dagger)$.

Solution. a) D'une part, on a

$$g(x, y) \leq \sup_{A \times B} g$$

pour tout $(x, y) \in A \times B$. Ainsi, on prend $\sup_A$ et $\sup_B$ des deux côtés pour obtenir

$$\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) \leq \sup_{A \times B} g.$$

D'autre part, on voit que

$$g(x, y) \leq \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) \quad (*)$$

pour tout $x \in A$ et $y \in B$. En effet, par définition, pour chaque $x \in A$ on a

$$\sup_{y \in B} g(x, y) = \sup\{g(x, y) \mid y \in B\},$$

donc comme $g(x, y) \in \{g(x, y) \mid y \in B\}$, il s'ensuit que

$$g(x, y) \leq \sup_{y \in B} g(x, y)$$

pour tout $x \in A$. Ensuite, de façon analogue, on a que

$$\sup_{y \in B} g(x, y) \leq \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y),$$

ce qui nous donne (*). Ainsi, le côté droit de l'inégalité est un majorant de $g(A \times B)$, donc

$$\sup_{A \times B} g \leq \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y).$$

b) Soit $P \times Q = \{x_0, \dots, x_m\} \times \{y_0, \dots, y_n\}$ une partition de R . Pour chaque $y \in [c, d]$, on note par

$$S(f(\cdot, y), P) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x, y)(x_i - x_{i-1})$$

la somme supérieure de f par rapport à la variable x et la partition P de $[a, b]$. Dans cette équation, y est fixe. De façon analogue, on aura la somme supérieure $S(f(x, \cdot), Q)$ par rapport à y , avec x fixé.

On a

$$\begin{aligned} \overline{\iint_R f} &= \inf_{P \times Q} S(f, P \times Q) \\ &= \inf_{P \times Q} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \inf_P \sum_{i=1}^n \inf_Q S \left(\sup_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x, \cdot), Q \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \inf_P \sum_{i=1}^n \overline{\int_c^d \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x, y) dy} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \overline{\int_c^d \inf_P S(f(\cdot, y), P) dy} \\ &= \overline{\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy}. \end{aligned}$$

On obtient la même formule pour l'intégrale inférieure. Ainsi, puisque f est intégrale, on conclut que toutes les intégrales convergent et que la formule (†) est vérifiée.