Analyse 2

Série 1

Intégration (solutionnaire)

1. Définition de l'intégrale de Riemann

Exercice 1. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a,b]$ telle que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$.

Solution. Avant de faire la solution, quelques rappels sur le supremum et l'infimum. Le supremum, s'il existe, est le plus petit majorant. Ainsi, si $E \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble majoré et que l'on pose $S = \sup_Q S(f,Q)$, cela veut dire que S est un majorant de E et que si S' est un autre majorant de E, alors $S \leq S'$.

Un truc souvent utile est le suivant. Pour $\varepsilon > 0$, on sait que $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, car $S - \varepsilon < S$ et S est le plus petit majorant. Cela veut dire qu'il existe $x \in E$ tel que $S - \varepsilon < x \leq S$, car autrement $S - \varepsilon$ serait un majorant, une contradiction.

Les mêmes idées s'appliquent à l'infimum.

$\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Par les propriétés du supremum, il existe une partition Q de $[a,b]$ telle que $I(f,Q) \geq \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$. De même, par les propriétés de l'infimum, il existe une partition R de $[a,b]$ telle que $S(f,R) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $P = Q \cup R$. Par le lemme vu en classe, on a $I(f,P) \geq I(f,Q)$ et $S(f,P) \leq S(f,R)$. En combinant les inégalités du paragraphe précédent, on obtient

$$S(f,P) - I(f,P) \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f + \varepsilon = \varepsilon,$$

cat $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ par hypothèse.

$\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une partition P de $[a,b]$ telle que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$. On a donc $S(f,P) < I(f,P) + \varepsilon$. Comme l'intégrale supérieure est l'infimum des $S(f,Q)$ sur les paritions Q, il suit que $\overline{\int_a^b} f \leq S(f,P)$. De façon similaire, on a $\underline{\int_a^b} f \geq I(f,P)$. On a donc

$$\overline{\int_a^b} f \leq S(f,P) \leq I(f,P) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en découle que $\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$, d'où f est intégrable.

Exercice 2. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit (P_n) une suite de partitions de $[a,b]$. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $I(f,P_n) \to L$ et $S(f,P_n) \to L$ lorsque $n \to \infty$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f = L$.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe une suite de partitions (P_n) de $[a,b]$ telle que $S(f,P_n) - I(f,P_n) \to 0$.

a) On pose $Q_n = P_1 \cup \cdots \cup P_n$. Montrer que Q_n est une partition de $[a,b]$ et que la suite $\big(I(f,Q_n)\big)$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$.

b) Montrer que $S(f,Q_n) - I(f,Q_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

c) Montrer que f est intégrable et que $\int_a^b f = L$.

Exercice 4. À l'aide de l'exercice 2, montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle $I = [a,b]$ indiqué en utilisant la suite de partitions donnée par $P_n = \{a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \ldots, a + (n-1)\Delta x, b\}$, où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

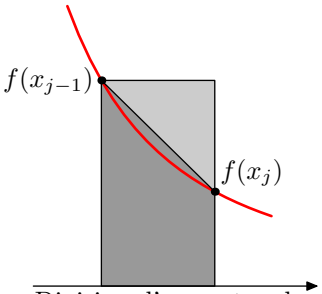
a) $f(x) = x$ sur $[1,2]$ $\qquad$ $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0,1]$

c)† $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1,2]$

Solution. c) On note les éléments de P_n par $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. On pose aussi $m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f$ et $M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f$. Puisque f est décroissante, il suit que $m_j = f(x_j)$ et $M_j = f(x_{j-1})$.

On peut séparer l'aire du rectangle $M_j(x_j - x_{j-1})$ en deux parties comme sur la figure :

$$\begin{aligned} M_j(x_j - x_{j-1}) &= f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(x_{j-1}) + f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1})}_{\text{aire du trapèze}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(x_{j-1}) - f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1})}_{\text{aire du triangle}} \end{aligned}$$



Division d'un rectangle en un trapèze et en un rectangle

Regardons à l'aire du triangle. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_{j-1} \in (x_{j-1}, x_j)$ telle que

$$\begin{aligned} \big(f(x_{j-1}) - f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1}) &= -f'(\xi_{j-1})(x_j - x_{j-1})^2 \\ &= \frac{2}{\xi_{j-1}^3}(x_j - x_{j-1})^2 \\ &\le 2(x_j - x_{j-1})^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \le \frac{1}{2}\big(f(x_{j-1}) + f(x_j)\big)(x_j - x_{j-1}) + 2(x_j - x_{j-1})^2.$$

En réarrangeant (et en se rappelant que $M_j = f(x_{j-1})$ et $m_j = f(x_j)$), on trouve

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \le m_j(x_j - x_{j-1}) + 2(x_j - x_{j-1})^2.$$

Maintenant, on utilise l'équation $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ et on prend la somme de $j = 1$ à n :

$$S(f,P) \leq I(f,P) + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} = I(f,P) + \frac{2}{n}.$$

Ceci montre que $0 \leq S(f,P) - I(f,P) \leq \frac{2}{n} \to 0$ lorsque $n \to 0$. Par le numéro 2, $I(f,P)$ converge vers une valeur $L \in \mathbb{R}$ et par le numéro 1, f est intégrable et $\int_1^2 f = L$.

Remarque. Malheureusement, cette approche ne permet par de *calculer* la valeur de l'intégrale, seulement de montrer que f est intégrable.

Exercice 5. Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables à l'aide de la définition.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0,1]$

b) $f(x) = x + 2$ sur $[1,2]$

c) $f(x) = 0$ sur $[0,\infty)$

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$ sur $[0,1]$

2. Propriétés de l'intégrale

Exercice 6. Montrer les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f est bornée sur $[a,b]$, alors pour tout $c \in [a,b]$, on a

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

b) Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b cf = c\left(\int_a^b f\right).$$

c) Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Exercice 7. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $|f|$ est intégrable.
Suggestion. Montrez d'abord que $\sup_A |f| - \inf_A |f| \leq \sup_A f - \inf_A f$ (p.ex. vous pourriez utiliser $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$.)

b) Montrer que f^2 est intégrable (f au carré).
Suggestion. Montrez d'abord qu'il existe $R \geq 0$ tel que $M_j^2 - m_j^2 \leq R(M_j - m_j)$, où $M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} |f|$ et $m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} |f|$. Vous devrez également montrer que $\sup_A(f^2) = \big(\sup_A |f|\big)^2$, (et de même pour inf), en général.

Solution.

a) On a $\sup_A |f| - \inf_A |f| \leq |f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq \sup_A f - \inf_A f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit P une partition de $[a, b]$ telle que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$. On pose

$$\begin{array}{ll} M_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} f & \overline{M}_j = \sup_{[x_{j-1},x_j]} |f| \\ m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f & \overline{m}_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} |f| \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} S(|f|, P) - I(|f|, P) &= \sum_{j=1}^{n} (\overline{M}_j - \overline{m}_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= S(f, P) - I(f, P) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Par l'exercice 1, on obtient que $|f|$ est intégrable.

b) Comme f est intégrable, il suit que $|f|$ est intégrable (par a), donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $S(|f|, P) - I(|f|, P) < \frac{\varepsilon}{R+1}$.

On tient pour acquis l'indice et on utilise sa notation. On a

$$\begin{aligned} S(f^2, P) - I(f^2, P) &\leq \sum_{j=1}^{n} (M_j^2 - m_j^2)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} R(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= R\big(S(|f|, P) - I(|f|, P)\big) \\ &\leq R\frac{\varepsilon}{R+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que f^2 est intégrable par le numéro 1.

Montrons maintenant qu'il existe $R \geq 0$ tel que $M_j^2 - m_j^2 \leq R(M_j - m_j)$. On a $M_j^2 - m_j^2 = (M_j + m_j)(M_j^2 - m_j^2) \leq (M + m)(M_j^2 - m_j^2)$, où M est le supremum de $|f|$ sur $[a, b]$ et m est l'infimum de $|f|$ sur $[a, b]$. Il suffit de prendre $R = M + m$.

Enfin, montrons que $\sup_A(f^2) = (\sup_A |f|)^2$. On pose $M = \sup_A |f|$ et $N = \sup_A(f^2)$. D'une part, on a $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in A$ et donc $f(x)^2 \leq M^2$ pour tout $x \in A$, donc M^2 est un majorant de f^2. Il suit que $N \leq M^2$.

D'autre part, on a $f(x)^2 \leq N$ pour tout $x \in A$, donc $|f(x)| \leq \sqrt{N}$ pour tout $x \in A$. Il suit que $\sqrt{N}$ est un majorant de $|f|$, donc $M \leq \sqrt{N}$, c'est-à-dire $M^2 \leq N$. On a bien $M^2 = N$ comme voulu.

Exercice 8. (Inégalité de Schwarz)

a) Soit le polynôme de degré deux $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Montrer que si $p(x) \geq 0$ pour tout x, alors son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou nul.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\Delta > 0$. On pose

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc

$$p(x_0) = 0$$
$$p'(x_0) = \sqrt{\Delta}.$$

Ainsi, x_0 n'est pas un minimum local, donc il existe forcément un y tel que $p(y) < p(x_0) = 0$, ce qui est une contradiction.

b) Soit $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Indice. Considérer le polynôme $p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t$.

Solution. On suppose que $\int_a^b g^2 \neq 0$. On considère

$$p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \mathrm{d}t = \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b (fg) + \lambda^2 \int_a^b g^2.$$

Il est clair que $p(\lambda) \geq 0$ pour tout λ. Ainsi, par le a), on a

$$0 \geq \Delta = 4\Big(\int_a^b fg\Big)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

Si $\int_a^b g^2 = 0$, alors on a $p(\lambda) = \lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est seulement possible si $\int_a^b fg = 0$.

Exercice 9. Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f \equiv 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$). Montrer que si f est seulement intégrable, alors l'énoncé est faux.

Solution. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe x_0 tel que, sans perte de généralité, $f(x_0) > 0$. Puisque f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ (exercice d'analyse 1). On a ainsi

$$\int_a^b f^2 \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2 > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} 0 = 0,$$

ce qui est une contracdiction.

Si f n'est pas continue, il suffit de prendre la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 10. Donner un exemple d'une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ non intégrable, mais telle que $|f|$ est intégrable.

Solution. Il suffit de prendre

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On voit que $|f(x)| = 1$ pour tout x.

Exercice 11. (Théorème de la moyenne) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Soit m l'infimum de f et M, son suprémum. Montrer que

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

b) On suppose, de plus, que f est continue. Déduire alors qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

Solution. a) Soit la partition $P = \{a, b\}$. On a

$$I(f,P) = m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f \leq S(f,P) = M(b-a).$$

b) Puisque f est continue, il existe $y, z \in [a,b]$ tels que $f(y) = m$ et $f(z) = M$. L'inégalité du a) s'écrit donc

$$f(y) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq f(z).$$

On voit maintenant que l'on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, il existe c entre y et z (donc dans $[a,b]$) tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

3. Théorème fondamental du calcul

Exercice 12. Soit h une fonction continue et soit f, g deux fonctions bornées et dérivables. Calculer la dérivée de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t.$$

Solution. On pose $G(x) = \int_a^x h$. Par le TFC1, G est dérivable. De plus, comme f et g sont dérivables, il suit que $G \circ f$ et $G \circ g$ sont dérivables. On a alors que

$$F(x) = G(f(x)) - G(g(x))$$

est dérivable, donc par la dérivation en chaîne, on a

$$F'(x) = G'(f(x))f'(x) - G'(g(x))g'(x) = h(f(x))f'(x) - h(g(x))g'(x).$$

Exercice 13. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$.

a) Montrer que F est continue sur $[a,b]$.
Remarque. Une fonction intégrable au sens de Riemann est nécessairement bornée.

b) La *fonction de Heaviside* est la fonction

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que $H(x) = \int_{-1}^x f$.

c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$, on a $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$.

d) Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\sqrt{x} = \int_0^x f$.

Exercice 14. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$. Montrer que si f est continue en $y \in [a,b]$, alors F est dérivable en y.

Exercice 15. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On admet qu'alors l'intégrale de f peut s'écrire comme une somme de Riemann de la forme

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right).$$

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{2n} e^{k/n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$

d) Trouver une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est n'est pas intégrable, mais dont la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\tfrac{j}{n}\right)$$

converge.

Solution. d) Il suffit de prendre

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Exercice 16. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{n}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n-1}.$$

Solution. a) On pose $g(x) = \frac{1}{x}$. On prend la partition $P = \{n, n+1\}$ de l'intervalle $[n, n+1]$. On a alors

$$I(g,P) \leq \int_n^{n+1} g \leq S(g,P).$$

D'une part, on a

$$I(g,P) = \inf_{[n,n+1]} g = \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, on a

$$S(g,P) = \sup_{[n,n+1]} g = \frac{1}{n}.$$

L'inégalité s'ensuit.

La deuxième inégalité découle de la première en écrivant

$$\int_1^n g = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} g.$$

b) On pose $f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - f(n)$$

converge. Que pouvez-vous dire sur la valeur de la limite ?

Solution. Par le a), on sait que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$, donc la suite est bornée. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n+1} &= f(n+1) - f(n) - \frac{1}{n+1} \\
&= f'(\xi)(n+1-n) - \frac{1}{n+1} && \text{par le thm. des acc. finis} \\
&= \frac{1}{\xi} - \frac{1}{n+1} && \text{par le TFC1} \\
&\geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} && \text{car } \xi \in (n, n+1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La suite est donc décroissante. Une suite minorée et décroissante converge, donc (u_n) converge. De plus, puisque $\frac{1}{n} \leq u_n$, on sait que la limite est positive.

Il est possible d'approximer la limite davantage, bien que ce ne soit pas la méthode la plus efficace. Soit γ la limite de la suite. Comme la suite est décroissante, on sait que $0 \leq \gamma \leq u_n$ pour tout n. On peut approcher la valeur de u_2 comme suit. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $P = \{1, 1+\frac{1}{m}, \ldots, 1+\frac{m-1}{m}, 2\}$ une subdivision de $[1,2]$. On a

$$\begin{aligned}
f(2) &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\geq I(f, P) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \inf_{[1+\frac{j-1}{m}, 1+\frac{j}{m}]} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{j}{m} - 1 - \frac{j-1}{m}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{j}{m}} \frac{1}{m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{m}{m+j} \frac{1}{m} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m+j}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2} - f(2) \leq \frac{3}{2} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m+j}.$$

Pour $m = 2$, on trouve $u_2 \leq \frac{11}{12}$ et pour $m = 3$, $u_2 \leq \frac{53}{60}$. Bref, on conclut que

$$0 \leq \gamma \leq u_2 \leq \frac{53}{60}.$$

On peut ainsi obtenir des approximations de plus en plus fines des u_n. Cependant, d'autres méthodes plus performantes sont utilisées pour s'approcher de γ, puisque la suite (u_n) converge vers γ plutôt lentement.

4. Techniques d'intégration

Exercice 17. Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{cotan}(3t)}$

b) $\displaystyle\int \log x \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$

f) $\displaystyle\int x \arctan x \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}$

Solution. c) On complète le carré. On a

$$\begin{aligned} 2-3x-4x^2 &= -4(x^2+\tfrac{3}{4}x)+2 \\ &= -4(x^2+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{9}{64})+2+\frac{9}{16} \\ &= -4(x+\tfrac{3}{8})^2+\frac{41}{16} \\ &= 4\Big(\frac{41}{64}-(x+\tfrac{3}{8})^2\Big). \end{aligned}$$

On vise à obtenir un arcsin. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x-4x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{\frac{41}{61}-(x+\frac{3}{8})^2}} && u = x+\tfrac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{\sqrt{41}}{8}\sqrt{1-\frac{64}{41}u^2}} && \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{2\sqrt{41}}\int \frac{8}{\sqrt{41}}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} && v = \tfrac{8}{\sqrt{41}}u \\ &= \frac{1}{2}\arcsin v + C && \tfrac{\sqrt{41}}{8}\mathrm{d}v = \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8x+24}{\sqrt{41}}\right)+C. \end{aligned}$$

d) La division de polynômes nous donne

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}.$$

Ensuite, on utilise les fractions partielles :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\\ &= \frac{A(x^2+x+1)+Bx(x-1)C(x-1)}{x^3-1}\\ &= \frac{x^2(A+B)+x(A-B+C)+(A-C)}{x^3-1}.\end{aligned}$$

On trouve les équations

$$A+B=1, \qquad A-B+C=0, \qquad A-C=0,$$

avec la solution

$$A=\tfrac{1}{3}, \qquad B=\tfrac{2}{3}, \qquad C=\tfrac{1}{3}.$$

On trouve donc pour l'intégrale

$$\int\left(x^2+\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\log|x-1|+\frac{1}{3}\log|x^2+x+1|+C.$$

e) On transforme l'intégrande en tangente et en sécante. On a

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t+3\cos^2 t} &= \int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{2\tan^2 t+3}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}u}{2u^2+3} && u=\tan x\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}u}{\frac{2}{3}u^2+1}\mathrm{d}u && \mathrm{d}u=\sec^2 x\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} && v=\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\arctan v+C && \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathrm{d}v=\mathrm{d}u\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\tan x\right).\end{aligned}$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1(x+\sqrt{x})\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^{1/3}}\right)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\log^3 t}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$

e) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{1+s^2}}$

Solution. d) Par essai-erreur, on trouve que -1 est un zéro de $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$. On divise ce polynôme par $x+1$ pour obtenir

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^3+x^2+x+1).$$

On voit maintenant que -1 est encore une racine, donc on trouve

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x+1)^2(x^2+1).$$

On utilise maintenant les fractions partielles. On trouve

$$\frac{x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C+Dx}{x^2+1}.$$

Ceci mène à

$$\begin{aligned} x &= A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+C(x+1)^2+Dx(x+1)^2 \\ &= x^3(A+D)+x^2(A+B+C+2D)+x(A+2C+D)+(A+B+C). \end{aligned}$$

On trouve que la solution est $A=D=0$, $C=\frac{1}{2}$ et $B=-\frac{1}{2}$.

Maintenant, on intègre facilement par

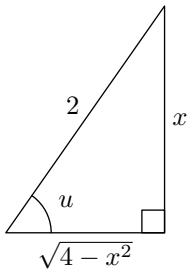
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\arctan x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-1\right) \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

e) L'expression $\sqrt{4-x^2}$ suggère le triangle et les égalités suivants

$$\cos u=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$\sin u=\frac{x}{2}$$

$$\cos u\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{2}.$$



L'intégrale indéfinie devient

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x &= \int (4\sin^2 u)\,(2\cos u)\,(2\cos u du)\\ &= 16\int \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

On pose $I = \int \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u$. Par intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \frac{\cos u\sin^3 u}{3} + \frac{1}{3}\int \sin^4 u\,\mathrm{d}u && w = \cos u \quad \mathrm{d}v = \sin^2 u\cos u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{\cos u\sin^3 u}{3} + \frac{1}{3}\int (1-\cos^2 u)\sin^2 u\,\mathrm{d}u && \mathrm{d}w = -\sin u\,\mathrm{d}u \quad v = \tfrac{\sin^3 u}{3}\\ &= \frac{\cos u\sin^3 u}{3} - \frac{\sin u\cos u}{6} + \frac{u}{6} - \frac{I}{3} + C.\end{aligned}$$

Il est suffisant de considérer la primitive avec $C = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{\cos u\sin^3 u}{4} - \frac{\sin u\cos u}{8} + \frac{u}{8}\\ &= \frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{64} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{32} + \frac{1}{8}\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Enfin, pour évaluer l'intégrale définie, on a

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = 16I = \left[\frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 2\arcsin(1) = \pi.$$

f) On peut résoudre l'intégrale par deux substitutions :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2\sqrt{s^2+1}} &= -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}} && u = \tfrac{1}{s}\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} && \mathrm{d}u = -\tfrac{1}{s^2}\mathrm{d}s\\ &= \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{v}} && v = 1+u^2\\ &= \sqrt{v}\Big|_{\frac{5}{4}}^2 && \mathrm{d}v = 2u\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 19. Soit $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Montrer que si f est paire ($f(-x) = f(x)$), alors $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.

b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors $\int_{-a}^{a} f = 0$.

c) Calculer les intégrales suivantes.

$i)$ $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x|\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $ii)$ $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $iii)$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x\,\mathrm{d}x$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

Solution. $i)$ L'intégrande est impair, donc on a

$$\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \left(\int_{-1}^{1} + \int_{1}^{2}\right) x|x|\mathrm{d}x = 0 + \int_{1}^{2} x|x|\mathrm{d}x.$$

Sur l'intervalle $[1,2]$, la valeur absolue n'est plus utile, on a donc

$$\int_{1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2} = \frac{7}{3}.$$

$ii)$ L'intégrande est impair. On utilise les identités trigonométriques des fonctions sinus et cosinus pour montrer que l'intégrale est nulle. Avec $u = x - \pi$, on a

$$\int_{0}^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(u+\pi)\cos^n(u+\pi)\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 u \cos^n u\mathrm{d}u = 0.$$

$iii)$ L'intégrande est impair, donc l'intégrale est nulle

5. Intégrales impropres

Exercice 20′. Trouver un exemple d'une fonction $f\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ continue et positive telle que $\int_a^\infty f$ converge, mais $\lim\limits_{x\to\infty} f \neq 0$.

Solution. Soit $g(x)$ la fonction

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ 1-x, & \text{si } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une fonction continue et positive en forme de triangle sur l'intervalle $[-1,1]$. Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{-1}^{1} g = 1$.

Pour $n \in \{0,2,4,6,\ldots\}$, on définit f par $f(x) = g\big(n^2(x-n)\big)$ si $x \in [n-1, n+1]$. Sur $[n-1,n+1]$, on a

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow g\big(n^2(x-n)\big) \neq 0 \Leftrightarrow n^2|x-n| < 1 \Leftrightarrow |x-n| < \frac{1}{n^2}.$$

On voit également que $f(n) = g(0) = 1$ et $\int_{n-1}^{n+1} f = \frac{2}{n^2}$, car sur $[n-1, n+1]$, le graphe de f est un triangle de base $\frac{2}{n^2}$ et de hauteur 1.

Enfin, on trouve

$$\int_{-1}^{\infty} f = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \int_{n-1}^{n+1} f = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

Comme $f(2k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il suit que $f \not\to 0$ lorque $x \to \infty$.

Exercice 20. Soit $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

a) Montrer que si $\int_a^\infty |f|$ converge, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si f est un $O\big(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\big)$, alors $\int_a^\infty f$ converge.

c) Trouver une fonction f telle que $\int_a^\infty f$ converge, mais pour laquelle il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que f est un $O\big(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\big)$.

Solution. a) Faisons d'abord le cas où $f \geq 0$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $f \not\to 0$ lorsque $x \to \infty$. Ainsi, il existe une suite (x_n) telle que $x_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et $f(x_n) \not\to 0$. Quitte à prendre une sous-suite de (x_n), on peut supposer que (x_n) est strictement croissante et $x_{n+1} > x_n + 2$.

L'idée est que, comme f est uniformément continue, pour chaque point où $f(x) \geq \varepsilon$, il existe un intervalle de longueur au moins 2δ tel que $f(y) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ sur cet intervalle. Ainsi, près de chacun de ces points, il y a au moins $\varepsilon\delta$ d'aire.

Puisque $f(x_n) \not\to 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \geq N$ tel que $f(x_{n_k}) \geq \varepsilon$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On peut supposer que $\delta < \frac{1}{2}$.

Pour x tel que $|x - x_{n_k}| < \delta < \frac{1}{2}$, on a

$$|f(x) - f(x_{n_k})| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x_{n_k}) - \tfrac{\varepsilon}{2} < f(x) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{\varepsilon}{2} \leq f(x).$$

Ainsi, on a $\int_{[x_{n_k}-\delta, x_{n_k}+\delta]} f \geq \frac{\varepsilon}{2}(2\delta) = \delta\varepsilon$. Comme $x_{n+1} > x_n + 2$ et que $\delta < \frac{1}{2}$, il suit que $[x_{n_k} - \delta, x_{n_k} + \delta] \cap [x_{n_{k+1}} - \delta, x_{n_{k+1}} + \delta] = \emptyset$. On peut donc écrire

$$\int_{a+\delta}^{x_{n_k+1}} f \geq \sum_{j=1}^{k} \int_{[x_{n_j}-\delta, x_{n_j}+\delta]} f \geq \sum_{j=1}^{k} \varepsilon\delta = k\varepsilon\delta.$$

Lorsque $k \to \infty$, le côté droite tend vers l'infini, donc le côté gauche aussi, ce qui est une contradiction.

Pour le cas général, on pose $g = |f|$. Alors $g \geq 0$ et $\int_a^\infty |g| = \int_a^\infty g = \int_a^\infty |f|$ converge, donc $g \to 0$ lorsque $x \to \infty$, c'est-à-dire $|f| \to 0$. Or, on sait (analyse 1) que $|f| \to 0$ si et seulement si $f \to 0$.

Exercice 21. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans trouver la valeur).

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin t\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, $a\neq 0$ et $m\in\mathbb{N}^*$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{1-x}\mathrm{d}x$

Solution. a) On peut étudier la convergence de $\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$, puisque celle-ci converge si et seulement si l'intégrale de départ converge. Ainsi, puisque $x\geq 1$, on a

$$\begin{aligned} x^2\geq x &\Rightarrow -x^2\leq -x\\ &\Rightarrow e^{-x^2}\leq e^{-x} \qquad \text{(car exp est croissante).}\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{M\to\infty} e^{-M}-e^{-1}=e^{-1}.$$

On a donc $\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\leq\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x<\infty$.

b) L'intégrale diverge, car on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \sin t\mathrm{d}t=\lim_{M\to\infty}(-\cos(M)+\cos(0))$$

et cette limite diverge. (Exercice d'analyse 1.)

c) L'intégrale converge, puisque

$$\frac{\sin x}{1+\cos x+e^x}\leq\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

et que $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ converge.

d) Le dénumérateur est non nul pour tout x, donc le seul problème se trouve à l'infini. On étudie l'intégrale sur l'intervalle $[1,\infty)$, puisque l'intégrande est intégrable sur $[0,1]$. Pour $x\geq 1$, on a

$$\frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}\leq\frac{1}{x^2}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{-1}{M}+1\right)=1.$$

On conclut que l'intégrale du départ converge.

e) Il y a deux problèmes, lorsque $x\to 0$ et lorsque $x\to\infty$. Ainsi, on sépare l'intégrale sur $[0,1]$ et sur $[1,\infty)$ et on analyse chacune séparemment.

Sur $[1,\infty)$, on a $x^2\leq e^x$ (montrez-le!), donc $x\leq e^{x/2}$. Ainsi, on obtient

$$\frac{x}{e^x-1}\leq\frac{e^{x/2}}{e^x-\frac{1}{2}e^x}=2e^{-x}.$$

On sait que $\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$ converge, donc l'intégrale de départ converge sur $[1,\infty)$.

Sur $[0,1)$, l'intégrale converge, car la limite suivante existe :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(1+x+o(x))-1}\qquad\text{(dév. limités de } e^x\text{)}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+o(1)}=1.$$

Ainsi, la fonction $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ se prolonge comme une fonction continue sur $[0,1]$, ce qui veut dire qu'elle est intégrable.

f) Le problème survient lorsque $x\to 1$, donc on considère l'intégrale sur $[\frac{1}{2},1]$. Pour $\frac{1}{2}\le x\le 1$, on a

$$\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x}\ge\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+1}}{1-x}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{y\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{y}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\lim_{y\to 1^-}-\log(1-y)+\log(\tfrac{1}{2})=\infty.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x\sqrt{x+1}}{1-x}\mathrm{d}x\ge\sqrt{\frac{3}{8}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=\infty.$$

On conclut que l'intégrale impropre diverge.

Exercice 22. Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Si elle converge, la calculer. Si elle diverge, calculer la valeur principale si possible.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\log|x|}{x}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\tan x\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

Solution. a) L'intégrale impropre diverge. La valeur principale vaut 0, puisque l'intégrande est impair et qu'on intègre sur $[-1,1]$.

c) On a

$$\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=\sqrt{3}-\sqrt{\varepsilon}.$$

L'intégrale impropre converge et elle vaut $\sqrt{3}$.

Exercice 23. (Fonction gamma)

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge pour tout $x>0$.

On pose $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ pour $x>0$.

b) Montrer que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.

c) Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ lorsque n est un nombre naturel.

d) Étendre le domaine de définition de Γ sur $\{x < 0\} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

e) Montrer que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x,$$

la fameuse *intégrale de Gauss*.