

Analyse 2

Série 1

Intégration

1. Définition de l'intégrale de Riemann

Exercice 1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

Exercice 2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit (P_n) une suite de partitions de $[a, b]$. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $I(f, P_n) \rightarrow L$ et $S(f, P_n) \rightarrow L$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f = L$.

Exercice 3. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe une suite de partitions (P_n) de $[a, b]$ telle que $S(f, P_n) - I(f, P_n) \rightarrow 0$.

- a) On pose $Q_n = P_1 \cup \dots \cup P_n$. Montrer que Q_n est une partition de $[a, b]$ et que la suite $(I(f, Q_n))$ converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- b) Montrer que $S(f, Q_n) - I(f, Q_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- c) Montrer que f est intégrable et que $\int_a^b f = L$.

Exercice 4. À l'aide de l'exercice 2, montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle $I = [a, b]$ indiqué en utilisant la suite de partitions donnée par $P_n = \{a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, a + (n-1)\Delta x, b\}$, où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

- a) $f(x) = x$ sur $[1, 2]$ $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0, 1]$
- c)[†] $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1, 2]$

Exercice 5. Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables à l'aide de la définition.

- a) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0, 1]$ b) $f(x) = x + 2$ sur $[1, 2]$
- c) $f(x) = 0$ sur $[0, \infty)$
- d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$ sur $[0, 1]$

2. Propriétés de l'intégrale

Exercice 6. Montrer les propriétés suivantes de l'intégrale.

a) Si f est bornée sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

b) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b cf = c \left(\int_a^b f \right).$$

c) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Exercice 7. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $|f|$ est intégrable.

Suggestion. Montrez d'abord que $\sup_A |f| - \inf_A |f| \leq \sup_A f - \inf_A f$ (p.ex. vous pourriez utiliser $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$.)

b) Montrer que f^2 est intégrable (f au carré).

Suggestion. Montrez d'abord qu'il existe $R \geq 0$ tel que $M_j^2 - m_j^2 \leq R(M_j - m_j)$, où $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} |f|$ et $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} |f|$. Vous devrez également montrer que $\sup_A(f^2) = (\sup_A |f|)^2$, (et de même pour inf), en général.

Exercice 8. (Inégalité de Schwarz)

a) Soit le polynôme de degré deux $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Montrer que si $p(x) \geq 0$ pour tout x , alors son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif ou nul.

b) Soit $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Montrer que

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

Indice. Considérer le polynôme $p(\lambda) = \int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 dt$.

Exercice 9. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_a^b f^2 = 0$, alors $f \equiv 0$ (c'est-à-dire $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$). Montrer que si f est seulement intégrable, alors l'énoncé est faux.

Exercice 10. Donner un exemple d'une fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ non intégrable, mais telle que $|f|$ est intégrable.

Exercice 11. (Théorème de la moyenne) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Soit m l'infimum de f et M , son supremum. Montrer que

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

b) On suppose, de plus, que f est continue. Dédurre alors qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

3. Théorème fondamental du calcul

Exercice 12. Soit h une fonction continue et soit f, g deux fonctions bornées et dérivables. Calculer la dérivée de

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt.$$

Exercice 13. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$.

a) Montrer que F est continue sur $[a, b]$.

Remarque. Une fonction intégrable au sens de Riemann est nécessairement bornée.

b) La *fonction de Heaviside* est la fonction

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $H(x) = \int_{-1}^x f$.

c) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, on a $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$.

d) Montrer qu'il n'existe aucune fonction intégrable $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sqrt{x} = \int_0^x f$.

Exercice 14. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) := \int_a^x f$. Montrer que si f est continue en $y \in [a, b]$, alors F est dérivable en y .

Exercice 15. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On admet qu'alors l'intégrale de f peut s'écrire comme une somme de Riemann de la forme

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} e^{k/n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

d) Trouver une fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas intégrable, mais dont la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$$

converge.

Exercice 16. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

b) On pose $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - f(n)$$

converge. Que pouvez-vous dire sur la valeur de la limite ?

4. Techniques d'intégration

Exercice 17. Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

a) $\int \frac{dt}{\cotan(3t)}$

b) $\int \log x dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

d) $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx$

e) $\int \frac{dt}{2\sin^2 t + 3\cos^2 t}$

f) $\int x \arctan x dx$

g) $\int \frac{du}{1+u^3}$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 (x + \sqrt{x}) dx & \text{b)} \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^{1/3}} \right) dx \\ \text{c)} \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \log^3 t} & \text{d)} \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \\ \text{e)} \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx & \text{f)} \int_1^2 \frac{ds}{s^2 \sqrt{1 + s^2}} \end{array}$$

Exercice 19. Soit $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- a) Montrer que si f est paire ($f(-x) = f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
- b) Montrer que si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors $\int_{-a}^a f = 0$.
- c) Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \int_{-1}^2 x|x| dx & \text{ii)} \int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^n x dx & \text{iii)} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx \\ & & (n \in \mathbb{N}^*) \end{array}$$

5. Intégrales impropres

Exercice 20'. Trouver un exemple d'une fonction $f: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ continue et positive telle que $\int_a^\infty f$ converge, mais $\lim_{x \rightarrow \infty} f \neq 0$.

Exercice 20. Soit $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

- a) Montrer que si $\int_a^\infty |f|$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si f est un $O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$, alors $\int_a^\infty f$ converge.
- c) Trouver une fonction f telle que $\int_a^\infty f$ converge, mais pour laquelle il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que f est un $O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$.

Exercice 21. Étudier la convergence des intégrales suivantes (sans trouver la valeur).

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^\infty e^{-x^2} dx & \text{b)} \int_0^\infty \sin t dt \\ \text{c)} \int_0^\infty \frac{\sin x}{1 + \cos x + e^x} dx & \text{d)} \int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx, a \neq 0 \text{ et } m \in \mathbb{N}^* \\ \text{e)} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx & \text{f)} \int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{1-x} dx \end{array}$$

Exercice 22. Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Si elle converge, la calculer. Si elle diverge, calculer la valeur principale si possible.

a) $\int_{-1}^1 \frac{\log |x|}{x} dx$

b) $\int_0^\pi \tan x dx$

c) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

Exercice 23. (Fonction gamma)

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ converge pour tout $x > 0$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ pour $x > 0$.

b) Montrer que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.

c) Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ lorsque n est un nombre naturel.

d) Étendre le domaine de définition de Γ sur $\{x < 0\} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$.

e) Montrer que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

la fameuse *intégrale de Gauss*.

Exercices supplémentaires

Cette section des exercices est optionnelle.

Définition. 1. Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle. Une *partition* (ou subdivision) P de R en rectangles est un ensemble de la forme $P = A \times D$, où $A = \{x_0, \dots, x_n\}$ est une partition de $[a, b]$ et $D = \{y_0, \dots, y_m\}$ est une partition de $[c, d]$.

2. Soit $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \inf_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x, y) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

3. On définit l'intégrale inférieure et l'intégrale supérieure par

$$\underline{\int \int_R} f = \sup_P I(f, P) \quad \text{et} \quad \overline{\int \int_R} f = \inf_P I(f, P),$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les partitions en rectangles de $[a, b] \times [c, d]$.

4. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\underline{\int \int_R} f = \overline{\int \int_R} f.$$

On note la quantité commune $\int \int_R f$ (ou $\int \int_R f(x, y) dA$, où dA désigne un *élément d'aire*).

Exercice 24. (Théorème de Fubini, version pour intégrale de Riemann) Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ et $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de la question est de montrer que

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (\dagger)$$

a) Soit $A = [a, b]$ et $B = [c, d]$ et soit $g: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que

$$\sup_{A \times B} g(x, y) = \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} g(x, y).$$

b) Montrer l'équation $(\dagger)$.