

Analyse 2

Série 0

Préliminaires (solutionnaire)

Exercice 1. a) Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit c et $h > 0$ tels que $c \in I$ et $c + h \in I$. Montrer que si f est continue en c , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{[c, c+h]} f(x) = f(c).$$

Montrer que le cas où $h < 0$ est également vrai. Dédurre ensuite le cas de l'infimum. (Attention ! f n'atteint pas nécessairement son suprémum sur $[c, c + h]$.)

b) Trouver une fonction $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{[c, c+h]} g(x) \neq g(c).$$

Solution. a) D'abord, notons que si $h > 0$ est assez petit, alors $\sup_{[c, c+h]} f$ est borné, car f est continue en c .

Soit (y_n) une suite décroissante telle que $0 < y_n < h$ et $y_n \downarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On pose

$$S_n = \sup_{[c, c+y_n]} f.$$

C'est une suite décroissante et minorée, donc elle converge vers, disons, S .

Pour chaque n , on a que $S_n - y_n < S_n$, donc $S_n - y_n$ n'est pas un majorant de $f([c, c + y_n])$. Ainsi, il existe $x_n \in [c, c + y_n]$ tel que $S_n - y_n \leq f(x_n) \leq S_n$. Il suit que

$$S_n - y_n \leq f(x_n) \leq S_n + y_n. \quad (*)$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite (x_n) converge vers c , donc si on laisse $n \rightarrow \infty$ dans $(*)$, on obtient

$$S - 0 \leq f(c) \leq S + 0$$

car f est continue en c (donc $f(x_n) \rightarrow f(c)$). On conclut que $S = f(c)$, c'est-à-dire

$$f(c) = S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[c, c+y_n]} f.$$

Puisque cela est vrai pour toutes les suites (y_n) telles que $y_n \downarrow 0$, on conclut que

$$f(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{[c, c+h]} f.$$

Le cas de l'infimum se déduit par la relation $\inf_{[c, c+h]} f = - \sup_{[c, c+h]} (-f)$.

b) $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ et $c = 0$ font l'affaire. Je vous laisse écrire les détails.

Exercice 2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y, z \in [a, b]$ avec $0 < z - y \leq \delta$, on ait

$$\sup_{x \in [y, z]} f(x) \leq \inf_{x \in [y, z]} f(x) + \varepsilon.$$

Exercice 3. On considère l'énoncé suivant.

Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur (a, b) . Alors f est uniformément continue.

- a) Cet énoncé est-il vrai ou faux? Sans tenter de la résoudre rigoureusement, essayez de vous convaincre d'un côté ou de l'autre.
- b) Montrer que f , définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$, n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$.
- c) Quelle est réponse du a)?

Solution. b) Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On pose $x_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ et $y_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $|x_K - y_K| < \delta$, car $(x_k - y_k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. De plus, on voit que

$$|f(x_k) - f(y_k)| = \left| \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) \right| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon.$$

Il suit que f n'est pas uniformément continue sur $[0, 1]$.

c) La réponse est faux, puisque la fonction f du b) en est un contre-exemple.

Exercice 4. Soit I un intervalle et soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que pour tout $a < b$ dans I , il existe M tel que pour tout $a \leq x \leq y \leq b$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est uniformément continue, continue seulement ou ni l'un ni l'autre.

- a) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$
- b) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, \infty)$
- c) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, \infty)$
- d) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0, 1)$
- e) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$
- f) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1]$

Solution. a) UC, car c'est une fonction continue sur un intervalle compact.

b) UC. Sur $[0, 1]$, on sait déjà qu'elle est UC. Sur $[1, \infty)$, on sait que

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, par le théorème des accroissements finis, on a

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

pour tout $x, y \in [1, \infty)$. Il suit que f est uniformément continue sur $[1, \infty)$.

On conclut que f est uniformément continue sur $[1, \infty)$.

c) UC. Comme la solution au b).

d) Continue, mais pas UC. En effet, il est clair que f est continue sur $(0, 1)$. Par contre, on sait que $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, donc f ne peut pas être uniformément continue.

e) UC. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a que $f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a que $f(x) \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Par un théorème vu en classe, f est uniformément continue.

f) UC. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a que $f(x) \rightarrow 0$. Il suit que f est UC.

Exercice 6. a) Développements limités. Montrer que si f est n -fois dérivable en x_0 , alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

b) Montrer les égalités suivantes[†].

$$i) \sin(x) = x + o(x^2) \quad ii) \log(1+x) = x + o(x) \quad iii) \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

Exercice 7. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en $a \in I$. Le développement limité à l'ordre $k \leq n$ de f est l'expression de la forme

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^k).$$

Déterminer le développement limité à l'ordre k des fonctions suivantes.

$$a) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, a = 0, k = 2 \quad b)^* f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases} \text{ et } a = 0, k = 5$$

*Astuce : plutôt que de dériver $\frac{\sin(x^2)}{x}$, calculez le développement limité de $x \mapsto \sin x$, ensuite remplacez x par x^2 et enfin, divisez l'expression par x .

[†] On tient pour acquis que $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$ et que $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ pour le moment. Cela sera démontré au chapitre 5, où ces fonctions seront également définies.

Solution. b) On sait que $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Comme cette égalité est vraie pour tous les petits x , on a $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$. Ensuite, on divise de chaque côté par x et on obtient

$$\frac{\sin(x^2)}{x} = x - \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

Remarque : Le fait que ces calculs fonctionnent sans devoir calculer directement la dérivée de $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ est l'une des raisons qui rend les développements limités intéressants. En particulier, on voit de cette équation que $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = \frac{5!}{6}$, où $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

Exercice 8. Soit $f, g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Solution. Soit L la limite. On sait que $L \geq 0$, car f et g sont à valeurs positives. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geq M$, on a

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que $f(x) < (L + \varepsilon)g(x)$, d'où f est un $O(g(x))$.

Exercice 9. Soit $a > 0$ et $f, g: (-a, a) \rightarrow (0, \infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.