

Analyse 2

Série 0

Préliminaires

Exercice 1. a) Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit c et $h > 0$ tels que $c \in I$ et $c + h \in I$. Montrer que si f est continue en c , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{[c, c+h]} f(x) = f(c).$$

Montrer que le cas où $h < 0$ est également vrai. Dédurre ensuite le cas de l'infimum. (Attention ! f n'atteint pas nécessairement son supremum sur $[c, c + h]$.)

b) Trouver une fonction $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{[c, c+h]} g(x) \neq g(c).$$

Exercice 2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y, z \in [a, b]$ avec $0 < z - y \leq \delta$, on ait

$$\sup_{x \in [y, z]} f(x) \leq \inf_{x \in [y, z]} f(x) + \varepsilon.$$

Exercice 3. On considère l'énoncé suivant.

Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur (a, b) . Alors f est uniformément continue.

- a) Cet énoncé est-il vrai ou faux ? Sans tenter de la résoudre rigoureusement, essayez de vous convaincre d'un côté ou de l'autre.
- b) Montrer que f , définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$, n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$.
- c) Quelle est réponse du a) ?

Exercice 4. Soit I un intervalle et soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Montrer que pour tout $a < b$ dans I , il existe M tel que pour tout $a \leq x \leq y \leq b$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est uniformément continue, continue seulement ou ni l'un ni l'autre.

- a) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, \infty)$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, \infty)$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $(0, 1)$ e) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$ f) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1]$

Exercice 6. a) Développements limités. Montrer que si f est n -fois dérivable en x_0 , alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

b) Montrer les égalités suivantes[†].

- i) $\sin(x) = x + o(x^2)$ ii) $\log(1 + x) = x + o(x)$ iii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

Exercice 7. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable en $a \in I$. Le développement limité à l'ordre $k \leq n$ de f est l'expression de la forme

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^k).$$

Déterminer le développement limité à l'ordre k des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $a = 0$, $k = 2$ b)* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$ et $a = 0$, $k = 5$

*Astuce : plutôt que de dériver $\frac{\sin(x^2)}{x}$, calculez le développement limité de $x \mapsto \sin x$, ensuite remplacez x par x^2 et enfin, divisez l'expression par x .

Exercice 8. Soit $f, g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Exercice 9. Soit $a > 0$ et $f, g: (-a, a) \rightarrow (0, \infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

[†] On tient pour acquis que $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$ et que $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ pour le moment. Cela sera démontré au chapitre 5, où ces fonctions seront également définies.