

Analyse 2

Notes de cours partielles pour la cours de Jonathan Godin.

Université de Montréal.

Chapitre 5

Série de Fourier

5.1. Introduction

5.2. Définition

Définition 5.2.1. On appelle une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

ou

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

une *série trigonométrique*.

Définition 5.2.2. Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique de période $p > 0$ si $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarques. 1. Une fonction $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction 2π -périodique si $f(-\pi) = f(\pi)$. On note le prolongement $\tilde{f}$, qui vérifie $\tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

2. Si f est de plus continue sur $[-\pi, \pi]$, alors $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. (Exercice)

Proposition 5.2.3. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ vérifient les relations d'orthogonalité suivantes

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } m = n = 0, \\ \pi, & \text{si } m = n \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & \text{si } m \neq n, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi, & \text{si } m = n \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & \text{si } m \neq n, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

ou, autrement dit,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{imt} = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } m = -n, m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{si } m \neq -n, m, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Théorème 5.2.4. On suppose que la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (*)$$

converge uniformément vers une fonction f sur $[-\pi, \pi]$. Alors

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

On pose $c_n := \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} := \overline{c_n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. Alors $(*)$ converge uniformément vers f si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ converge vers f . Dans ce cas,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Définition 5.2.5. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Les *coefficients de Fourier* de f sont définies par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

ou $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

La *série de Fourier* de f est

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}.$$

(égales au niveau formelle, voir ci-bas).

Remarque. Comme $\overline{c_n} = c_{-n}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{int} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-int} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n e^{int}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Re(c_n e^{int}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))
\end{aligned}$$

5.2.1 Approximation

Théorème 5.2.6. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
&\inf \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f - \sum_{n=-k}^k d_n e^{inx} \right)^2 dx \mid \begin{array}{l} d_{-k}, \dots, d_k \in \mathbb{C} \\ d_{-n} = \overline{d_n} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f - \sum_{n=-k}^k c_n(f) e^{inx} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \sum_{n=-k}^k |c_n(f)|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Corollaire 5.2.7. (Inégalité de Bessel) Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2$$

ssi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

Corollaire 5.2.8. Si $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f) = 0.$$

De plus, les séries

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n(f)|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2$$

convergent.

5.3. Convergence

Définition 5.3.1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- (i) On dit que f est *continue par morceaux* s'il existe une partition $P = \{x_0 < \dots < x_n\}$ de $[a, b]$ telle que f est continue sur (x_{i-1}, x_i) pour $i = 1, \dots, n$ et les limites

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x)$$

existent pour $i = 0, \dots, n-1$ et $j = 1, \dots, n$.

- (ii) On dit que f est *régulière par morceaux* s'il existe une partition $P = \{x_0 < \dots < x_n\}$ de $[a, b]$ telle que f est continûment dérivable sur (x_{i-1}, x_i) pour chaque $i = 1, \dots, n$ et les limites

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_j^-} f'(x)$$

existent pour $i = 0, \dots, n-1$ et $j = 1, \dots, n$.

Lemme 5.3.2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_k(x) = \sum_{n=-k}^k e^{inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos(nx).$$

On l'appelle le *noyau de Dirichlet*. Il possède les propriétés suivantes.

- 1) D_k est paire ($D_k(-x) = D_k(x)$).
- 2) D_k est périodique de période 2π .
- 3) $\int_0^\pi D_k = \int_{-\pi}^0 D_x = \pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$D_k(x) = \frac{\sin((k + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)} = \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})x} - e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}.$$

Remarque. On peut montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k(x) = 0$ si $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ et que $D_k(0) = 2k + 1$.

On peut s'imaginer que $\frac{1}{2\pi} D_k \rightarrow \delta$, une « fonction » qui est telle que $\int_A \delta = 1$ ssi $0 \in A$. Cette « fonction » s'appelle le *delta de Dirac*.

Il a la propriété que $\int_{-\pi}^\pi f \delta = f(0)$. En particulier, $\int_{-\pi}^\pi f(x+t) \delta(t) dt = f(x)$.

Théorème (de convergence d'une série de Fourier) 5.3.3. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière par morceaux. Alors, la série de Fourier de f converge vers

$$\begin{cases} \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}, & \text{si } x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}, & \text{si } x \in \{-\pi, \pi\}, \end{cases}$$

où $f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ et $f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$.

5.4. Dérivation et intégration de séries de Fourier

Théorème (Convergence uniforme) 5.4.1. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est

1. continue,
2. régulière par morceaux
3. et si $f(-\pi) = f(\pi)$,

alors sa série de Fourier converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$.

Corollaire 5.4.2. [(Convergence uniforme, primitive)] Si $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème et si $c_0(f) = 0$, alors la série de Fourier de $F(x) := \int_{-\pi}^x f$ converge uniformément vers F et

$$F(x) = c_0(F) - i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{c_n(f)e^{inx}}{n},$$

$$\text{avec } c_0(F) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} (-1)^n \frac{ic_n(f)}{n}.$$

Remarque. En terme de sin et cos :

$$F(x) = \frac{a_0(F)}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n} \sin(nx)$$

$$\text{et } a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n(f)}{n}.$$

5.5. Changement de variable

Proposition 5.5.1. Soit $[a, b] \subsetneq [-\pi, \pi]$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est un prolongement de f régulier par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ tel que $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$, alors la série de Fourier de $\tilde{f}$ vérifie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{f})e^{inx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{pour tout } x \in (a, b).$$

De plus, cette égalité est vraie en $x = a$ et $x = b$ si $\tilde{f}$ est continue en ces points.

Théorème 5.5.2. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière par morceaux, alors la série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi}{b-a}(x-b-a)}$$

converge simplement vers $\begin{cases} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & \text{si } x \in (a, b), \\ \frac{f(a^+)+f(b^-)}{2}, & \text{si } x \in \{a, b\}, \end{cases}$ où

$$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i \frac{n\pi}{b-a}(2x-b-a)} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque. On peut écrire le théorème en terme de sin et de cos avec

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(2x-b-a)\right) dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(2x-b-a)\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.6. Noyau de Féjer

Proposition 5.6.1. Soit $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=-k}^k e^{imx}.$$

On l'appelle le *noyau de Féjer*. Il vérifie les propriétés suivantes.

- 1) F_n est 2π -périodique, paire et positive.
- 2) $F_n(x) = D_n(x)^2 = \left(\frac{\sin((k + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)} \right)^2$.
- 3) $\int_0^\pi F_n = \int_{-\pi}^0 F_n = \pi$.
- 4) Pour tout $\varepsilon > 0$, $F_n \rightarrow 0$ uniformément lorsque $n \rightarrow \infty$ sur $[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$.
- 5) Pour toute fonction f intégrable et 2π -périodique, si $S_n(f)$ est le polynôme de Fourier de f de degré n , alors

$$\bar{S}_n(f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) dt.$$

Démonstration. 1) et 3) : Clair. Le fait que $F_n \geq 0$ découle directement du 2).

2) On le montre par calcul direct. On utilise la formule des sommes géométriques sur les exponentielles complexes. (On pourrait aussi le montrer sans exponentielle et seulement avec des identités trigonométriques.) On a

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{i(k+\frac{1}{2})x} - e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \right) \\
&= \frac{1}{2in \sin(x/2)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix/2} e^{ikx} - e^{-ix/2} e^{-ikx} \right) \\
&= \frac{1}{2in \sin(x/2)} \left(e^{ix/2} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} - e^{-ix/2} \frac{e^{-inx} - 1}{e^{-ix} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{2in \sin(x/2)} \left(\frac{e^{inx} - 1}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} - e^{-ix/2} \frac{e^{-inx} - 1}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \right) \\
&= \frac{1}{2in \sin(x/2)} \frac{1}{2i \sin(x/2)} (e^{inx} - 1 + e^{-inx} - 1) \\
&= \frac{-1}{4n \sin^2(x/2)} \left(e^{inx/2} - e^{-inx/2} \right)^2 \\
&= \frac{-1}{4n \sin^2(x/2)} (2i \sin(nx/2))^2 \\
&= \frac{\sin^2(nx/2)}{n \sin^2(x/2)}.
\end{aligned}$$

4) Sur $[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$, on a $F_n(x) \leq \frac{1}{n \sin^2(\varepsilon/2)}$. Lorsque $n \rightarrow \infty$, on voit que $F_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$.

5) Comme pour le 2, c'est un calcul direct. On a

$$\begin{aligned}
\bar{S}_n(f)(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(f)(x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=-k}^k c_n(f) e^{imx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=-k}^k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-imt} dt e^{imx} \\
&= \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=-k}^k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{im(x-t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m=-k}^k e^{im(x-t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) dt.
\end{aligned}$$

Ceci montre la première formule. Pour obtenir l'autre, on fait le changement de variable $u(t) = x - t$ et on utilise le fait que $t \mapsto f(t)F_n(x-t)$ est 2π -périodique. On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t) F_n(t) (-dt) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) F_n(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{x-\pi}^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{x+\pi} \right) f(x-t) F_n(t) dt. \quad (*)
\end{aligned}$$

Enfin, avec le changement de variable $u(t) = t + 2\pi$, on a

$$\int_{x-\pi}^{-\pi} f(x-t) F_n(t) dt = \int_{x+\pi}^{\pi} f(x-u-2\pi) F_n(u-2\pi) du = - \int_{\pi}^{x+\pi} f(x-u) F_n(u) du.$$

Ainsi, dans (*), l'intégrale de gauche s'annule avec l'intégrale de droite et il reste seulement l'intégrale voulue. □

Théorème 5.6.2. Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue, alors $\bar{S}_k(f) \rightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

Corollaire 5.6.3. Sous les mêmes hypothèses, si $(S_k(f)(x))_k$ converge, alors $S_k(f)(x) \rightarrow f(x)$.

Démonstration. Si (a_n) est une suite qui converge vers L , alors $\frac{1}{n} \sum_k a_k \rightarrow L$. (Exercice d'analyse 1.) Il en découle que si $S(f)(x)$, la série de Fourier de f en x , converge vers L , alors $\bar{S}(f)(x)$ aussi. Or, on sait que $\bar{S}(f)(x) = f(x)$, donc on aura $L = f(x)$. □

Démonstration du théorème. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue sur $[-\pi, \pi]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [-\pi, \pi]$, si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ensuite, par le 4) de la proposition, $F_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\int_{-\pi}^{-\delta} |f(t - x) - f(x)| F_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \int_{\delta}^{\pi} |f(t - x) - f(x)| F_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut maintenant combiner les inégalités comme suit. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |\overline{f_n}(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) F_n(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x - t) - f(x)) F_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t) - f(x)| F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |f(x - t) - f(x)| F_n(t) dt \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x - t) - f(x)| F_n(t) dt \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{3} F_n(t) dt \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Il suit que $\overline{S_n}(f) \rightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

□