

Analyse 2

Devoir 2

Hiver 2026

Jonathan Godin

Afin de lever toute ambiguïté, nous choisissons explicitement pour ce devoir la convention pour laquelle $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ne contient pas 0.

À remettre en papier avant le 9 avril 16h, soit au AA-5255 si je suis là ou glisser sous la porte du AA-5247. Vous pouvez taper votre devoir ou l'écrire à la main sur papier (blanc ou ligné, pas quadrier) ou tablette. Écrivez proprement et lisiblement, sinon je n'accepterai pas le devoir.

Question 0. (1pts) Soit $E_1, E_2, E_3, \dots$ des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ tels que $E_n \subseteq E_{n+1}$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$ positive. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in E_n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (*)$$

Remarque. On ne suppose pas que $\sum a_n$ converge, cela veut dire qu'il faut montrer l'égalité (*) dans le cas où $\sum a_n$ converge et dans le cas où $\sum a_n = \infty$.
(C'est un exercice d'analyse 1 qui ne devrait pas prendre plus de deux ou trois lignes.)

Question 1. (7pts) Soit (p_n) la suite des nombres premiers, en ordre croissant : $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$. On tient pour acquis que tout naturel possède une factorisation unique en nombres premiers de la forme $p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$. On pose

$$E_n = \{p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n} \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E_n \subseteq E_{n+1}$, mais que $E_n \neq E_{n+1}$. Montrer ensuite que $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

b) Soit $s \geq 1$. Montrer que $\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - (p_k)^{-s}} = \sum_{k \in E_n} \frac{1}{k^s}$.

c) Dédurre que $\prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

d) Montrer que $\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{\infty} \frac{1}{p}$ diverge. *Indice.* Appliquer le log sur l'équation du b) avec $s = 1$.

Question 2. (9pts) Soit X une variable aléatoire absolument continue à valeurs dans $[-\pi, \pi]$, c'est-à-dire une variable aléatoire dont sa distribution est déterminée par une fonction intégrable $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ (la densité de X) telle que $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f = 1$. Dans ce cas, on définit la *fonction caractéristique* de X par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) := \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} f(x) dx.$$

Pour tout l'exercice, on supposera tacitement que toutes les fonctions de densité considérées sont continues et régulière par morceaux.

- Soit Y une autre variable aléatoire absolument continue à valeurs dans $[-\pi, \pi]$. Montrer que si $\varphi_Y = \varphi_X$, alors X et Y ont la même fonction de densité.
- Soit (X_n) une suite de variables aléatoires absolument continues à valeurs dans $[-\pi, \pi]$ et f_n la fonction de densité de X_n . On suppose que $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ telle que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(k) < \infty$ et $|\varphi_{X_n}(t)| \leq \psi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. (Dans un cours de probabilité, on dirait que X_n converge vers X en loi.)
Remarque. L'hypothèse que $\varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$ est suffisante pour conclure que $X_n \rightarrow X$ en loi, mais il faudrait utiliser la transformée de Fourier, qui dépasse le contenu du cours.
- Montrer que φ_X est infiniment dérivable et $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}(X^n)$, où $\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\pi}^{\pi} x^n f$.
Remarque. Nous n'avons pas vu de théorèmes qui permettent d'échanger la dérivée et l'intégrale. Il y a un autre moyen simple d'obtenir le résultat avec les outils du cours.
- Soit X une variable aléatoire absolument continue à valeur dans $[-\pi, \pi]$ telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires absolument continues telle que $\varphi_{X_n}(t) = (\varphi_X(t/\sqrt{n}))^n$. Montrer que $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque. Il n'est pas nécessaire d'avoir fait un cours de probabilité pour faire la question, mais cela peut aider à comprendre l'intention du problème. On peut montrer que si $Y_1, Y_2, \dots$ sont indépendantes et identiquement distribuées, alors $Z_n = (\bar{Y}_n - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ a bien une fonction caractéristique de la forme $\varphi_Z(t) = (\varphi_{\frac{Y_1 - \mu}{\sigma}}(t/\sqrt{n}))^n$, où $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$, $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1)$ et $\bar{Y}_n := \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$. La limite $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est la fonction caractéristique de la loi normale standard.