

Analyse 2

Devoir 1

Hiver 2026

Jonathan Godin

Question 1. (14pts) Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une partition de $[a, b]$. On définit la *largeur* de P par $\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition P de $[a, b]$, si $\|P\| < \delta$, alors $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

- (4pts) a) On pose $M := \sup_{[a,b]} f$ et $m := \inf_{[a,b]} f$. Soit $\delta > 0$ et soit P une partition de $[a, b]$ avec $\|P\| < \delta$. Soit $x \in [a, b]$. Montrer que

$$S(f, P) - S(f, P \cup \{x\}) \leq (M - m)\delta.$$

- (2pts) b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partition, disons $Q = \{a = y_0 < \dots < y_d = b\}$, de $[a, b]$ telle que $S(f, Q) - I(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2}$.

- (2pts) c) On pose $P_0 := P$ et, pour $1 \leq j \leq d+1$, $P_j := P_{j-1} \cup \{y_{j-1}\}$, où les y_j sont les éléments de Q du b). Montrer que

$$S(f, P_j) - S(f, P_{j+1}) \leq (M - m)\delta.$$

- (2pts) d) Dédurre que $S(f, P) - S(f, P_{d+1}) \leq (M - m)(d + 1)\delta$.

- (4pts) e) À partir du a) à d), montrer qu'il existe δ tel que pour toute partition P de $[a, b]$, si $\|P\| < \delta$, alors

$$S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Solution. a) Supposons que $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$. Si $x \in P$, il n'y a rien à montrer, donc supposons que $x_k < x < x_{k+1}$ pour un certain $0 \leq k < n$. Il est clair, dans ce cas, que

$$S(f, P) - S(f, P \cup \{x\}) = S(f, \{x_k < x_{k+1}\}) - S(f, \{x_k < x < x_{k+1}\}). \quad (*)$$

Il est donc suffisant de montrer que $(*)$ est plus petit que $(M - m)\delta$. On a

$$\begin{aligned} & S(f, \{x_k < x_{k+1}\}) - S(f, \{x_k < x < x_{k+1}\}) \\ &= M_k(x_{k+1} - x_k) - \left(\sup_{[x_k, x]} f \cdot (x - x_k) + \sup_{[x, x_{k+1}]} f \cdot (x_{k+1} - x) \right) \\ &\leq M(x_{k+1} - x_k) - \left(m(x - x_k) + m(x_{k+1} - x) \right) \\ &\leq M(x_{k+1} - x_k) - m(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq (M - m)(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq (M - m)\delta. \end{aligned}$$

b) Cela découle d'un exercice de la série 1.

Il existe une partition Q_1 de $[a, b]$ telle que

$$I(f, Q_1) \geq \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{8},$$

car sinon $\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{8}$ serait un majorant des $I(f, P)$, ce qui est impossible puisque $\int_a^b f$ est le plus petit majorant. De la façon, il existe une partition Q_2 de $[a, b]$ telle que

$$S(f, Q_2) \leq \overline{\int_a^b f} + \frac{\varepsilon}{8}.$$

On pose $Q = Q_1 \cup Q_2$. Comme f est intégrable, on a $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$, donc

$$S(f, Q) - I(f, Q) \leq S(f, Q) - \overline{\int_a^b f} + \int_a^b f - I(f, Q) \leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Puisque P_j est un raffinement de P , on a $\|P_j\| \leq \delta$ pour tout j . Il suffit donc d'appliquer le a) à P_j et P_{j+1} .

d) On a

$$\begin{aligned} S(f, P) - S(f, P_n) &= \sum_{j=1}^{d+1} \left(S(f, P_{j-1}) - S(f, P_j) \right) && \text{(somme télescopique)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{d+1} (M - m)\delta \\ &= (M - m)(d + 1)\delta. \end{aligned}$$

e) On peut répéter les a) à d) pour $I(f, P)$ pour obtenir $I(f, P) - I(f, P \cup Q) \geq (m - M)(d + 1)\delta$. Il suit que

$$\begin{aligned} S(f, P) - I(f, Q) &\leq \left(S(f, P) - S(f, P \cup Q) \right) + \left(I(f, P \cup Q) - I(f, P) \right) + \left(S(f, P \cup Q) - I(f, P \cup Q) \right) \\ &\leq (M - m)(d + 1)\delta + (M - m)(d + 1)\delta + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 2(M - m)(d + 1)\delta + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon/4}{1 + (|M| + |m|)(d + 1)}$.

Question 2. (13pts) On pose $I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$.

(3pts) a) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

(3pts) b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in (0, 1)$, on a $I_n \geq 2\lambda(1 - \lambda^2)^n$. Dédurre que $I_n \geq \frac{2}{\sqrt{2n}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dédurre ensuite qu'il existe $M > 0$ tel que $I_n \geq \frac{2M}{\sqrt{2n}}$.

(3pts) c) On pose

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{I_n} (1 - x^2)^n, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(0)$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x) dx$. Montrer également que pour tout $\lambda > 0$, $L_n \rightarrow 0$ uniformément sur $\mathbb{R} \setminus (-\lambda, \lambda)$.

(4pts) d) On pose $p_n(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) L_n(t) dt$. Montrer que $p_n \rightarrow f$ uniformément sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Indice. On peut écrire $f(x) = \int_{-1}^1 f(x) L_n(t) dt$. Utilisez le c) et la continuité uniforme de f pour analyser $|p_n - f|$.

Solution. a) D'abord, on voit que (I_n) est décroissante et minorée, puisque $0 \leq (1 - x^2)^{n+1} \leq (1 - x^2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, donc en intégrant chaque membre de l'inéquation, on trouve $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Ainsi, (I_n) converge vers, disons, $I \geq 0$.

Soit $E_\varepsilon = [-1, 1] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ et $F_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$, de sorte que $E_\varepsilon \cup F_\varepsilon = [-1, 1]$. Sur E_ε , on a $(1 - x^2)^n \leq (1 - \varepsilon^2)^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, donc $(1 - x^2)^n$ converge uniformément vers 0 sur E_ε .

Sur F_ε , on a $(1 - x^2)^n \leq 1$. On trouve

$$I_n = \int_{E_\varepsilon} (1 - x^2)^n dx + \int_{F_\varepsilon} (1 - x^2)^n dx \leq \int_{E_\varepsilon} (1 - x^2)^n dx + \int_{F_\varepsilon} 1 = \int_{E_\varepsilon} (1 - x^2)^n dx + 2\varepsilon.$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on trouve $I \leq 0 + 2\varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $I = 0$.

b) On a

$$I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx \geq \int_{-\lambda}^{\lambda} (1 - x^2)^n dx \geq \int_{-\lambda}^{\lambda} (1 - \lambda^2)^n dx = 2\lambda(1 - \lambda^2)^n.$$

Ensuite, il suffit de prendre $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Par l'inégalité de Bernoulli, on a $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. On a donc $I_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Si on ne se rappelait pas de l'inégalité de Bernoulli, on peut aussi procéder comme suit. On pose $a_n := \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$. Comme $a_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$ (analyse 1), avec $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\left| a_n - \frac{1}{\sqrt{e}} \right| < \frac{1}{2\sqrt{e}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{e}} < a_n.$$

On pose $M := \min \left\{ a_1, a_2, \dots, a_N, \frac{1}{2\sqrt{e}} \right\}$. On a bien $M > 0$ et $a_n \geq M$ pour tout n . Il suit que

$$I_n \geq \frac{2}{\sqrt{2n}} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n \geq \frac{2M}{\sqrt{2n}}.$$

c) On a $L_n(0) = \frac{1}{I_n}$. Comme $I_n \downarrow 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{I_n} = \infty$. Ensuite, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n = \int_{-1}^1 \frac{1}{I_n} (1 - x^2)^n dx = \frac{1}{I_n} \cdot I_n = 1.$$

Par la suite, si $\lambda \geq 1$, alors $L_n \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus (-\lambda, \lambda)$, donc il n'y a rien à faire.

Et enfin, si $0 < \lambda < 1$, alors $(1 - x^2)^n \leq (1 - \lambda^2)^n$ sur $[-1, 1] \setminus (-\lambda, \lambda)$. On trouve donc

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{I_n} |1 - \lambda^2|^n \leq \frac{\sqrt{2n}}{M} (1 - \lambda)^n \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Comme le majorant ne dépend pas de x , il suit que $L_n(x)$ converge uniformément vers 0.

d) Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $x, y \in [-1, 1]$, si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (On veut $\delta < \frac{1}{2}$ pour que $x - t$ et x soit dans $[-1, 1]$ lorsque $|t| < \delta$, comme on verra bientôt.)

Comme $\int_{-1}^1 L_n = 1$, il suit que $f(x) = f(x) \int_{-1}^1 L_n(t) dt = \int_{-1}^1 f(x) L_n(t) dt$. (Attention, on intègre en t et f dépend de x .) Pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a

$$\begin{aligned} |p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 f(x - t) L_n(t) dt - \int_{-1}^1 f(x) L_n(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{-1}^1 (f(x - t) - f(x)) L_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x - t) - f(x)| L_n(t) dt \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x - t) - f(x)| L_n(t) dt + \int_{[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)} |f(x - t) - f(x)| L_n(t) dt \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, comme $t \in [-\delta, \delta]$, il suit que $|x - t - x| = |t| \leq \delta$, donc par la continuité uniforme, on a $|f(x - t) - f(x)| < \varepsilon$. On a

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x - t) - f(x)| L_n(t) dt \leq \varepsilon \int_{-1}^1 L_n(t) dt = \varepsilon.$$

Pour la deuxième intégrale, par le c), $L_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $L_n < \varepsilon$. Comme f est continue, elle est bornée, disons par M , donc $|f(x - t) - f(x)| \leq 2M$. On obtient

$$\int_{[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)} |f(x - t) - f(x)| L_n(t) dt < \int_{[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)} 2M\varepsilon dt \leq 4M\varepsilon.$$

En combinant, on trouve, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et pour $n \geq N$,

$$|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon + 4M\varepsilon = \varepsilon(1 + 4M).$$

(On pourrait nettoyer la démarche pour arriver à ε , mais cela ne change pas grand chose, vu que $1 + 4M$ est une constante connue indépendante de ε , n et N .)