

Analyse 2

Devoir 1

Hiver 2026

Jonathan Godin

Si vous utilisez un résultat, indiquez d'où il provient (p.ex. « par un théorème du chapitre 1 » ou « par l'exercice 12 de la série 1 » ou « par le théorème des deux gendarmes »).

Le devoir est à remettre **lundi le 9 février** au début du cours en papier ou par courriel.

Propreté.

1. Il est fortement suggéré d'écrire vos devoirs en $\text{\TeX}$ ou en Word. Dans ce cas, vous pouvez l'imprimer recto-verso et vous devez m'envoyer le `.tex` (il ne sera pas corrigé).

Maximum de cinq pages.

2. Cependant, il est permis de remettre un devoir écrit à la main (sur papier ou sur une tablette) **si les consignes suivantes sont respectées** :

- écrire à double-interligne;
- écrire sur du papier blanc ou ligné (mais pas quadrillé!);
- écrire recto seulement;
- écrire *très* propre, *lisiblement* et *gros*;
- **Maximum de dix pages.**

Si l'un de ces critères n'est pas rempli, je n'accepterai pas le devoir. Vous pourrez alors le réécrire en suivant correctement les consignes et le remettre en retard (10% par jour, jusqu'à un maximum de deux jours, après quoi, vous aurez une note de 0).

Question 1. Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une partition de $[a, b]$. On définit la *largeur* de P par $\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition P de $[a, b]$, si $\|P\| < \delta$, alors $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

- a) On pose $M := \sup_{[a, b]} f$ et $m := \inf_{[a, b]} f$. Soit $\delta > 0$ et soit P une partition de $[a, b]$ avec $\|P\| < \delta$. Soit $x \in [a, b]$. Montrer que

$$S(f, P) - S(f, P \cup \{x\}) \leq (M - m)\delta.$$

- b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partition, disons $Q = \{a = y_0 < \dots < y_d = b\}$, de $[a, b]$ telle que $S(f, Q) - I(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2}$.
- c) On pose $P_0 := P$ et, pour $1 \leq j \leq d+1$, $P_j := P_{j-1} \cup \{y_{j-1}\}$, où les y_j sont les éléments de Q du b). Montrer que

$$S(f, P_j) - S(f, P_{j+1}) \leq (M - m)\delta.$$

- d) Dédurre que $S(f, P) - S(f, P_{d+1}) \leq (M - m)(d + 1)\delta$.
- e) À partir du a) à d), montrer qu'il existe δ tel que pour toute partition P de $[a, b]$, si $\|P\| < \delta$, alors

$$S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Question 2. On pose $I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$.

- a) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in (0, 1)$, on a $I_n \geq 2\lambda(1 - \lambda^2)^n$. Dédurre que $I_n \geq \frac{2}{\sqrt{2n}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dédurre ensuite qu'il existe $M > 0$ tel que $I_n \geq \frac{2M}{\sqrt{2n}}$.
- c) On pose

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{I_n} (1 - x^2)^n, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(0)$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x) dx$. Montrer également que pour tout $\lambda > 0$, $L_n \rightarrow 0$ uniformément sur $\mathbb{R} \setminus (-\lambda, \lambda)$.

- d) On pose $p_n(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) L_n(t) dt$. Montrer que $p_n \rightarrow f$ uniformément sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Indice. On peut écrire $f(x) = \int_{-1}^1 f(x) L_n(t) dt$. Utilisez le c) et la continuité uniforme de f pour analyser $|p_n - f|$.