

Analyse 2

Notes de cours faites par Jonathan Godin*

Si l'on demandait à quoi pouvait conduire l'infini, la seule réponse acceptable était : « À n'importe quoi. »

— Frank Herbert, dans *Dune la maison des mères*,
(traduit par Guy Abadia)

Table des matières

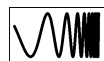
Introduction.....	3
Retour sur la continuité uniforme.....	3
Retour sur la dérivée d'une fonction.....	5
Classes de fonctions dérivables.....	6
Petit o et grand O.....	7
Fonctions élémentaires.....	11
Chapitre 1. Calcul intégral.....	12
1.1. Définition de l'intégrale de Riemann.....	12
1.2. Propriétés de l'intégrale.....	17
1.3. Intégrabilité des fonctions continues.....	20
1.4. Théorème fondamental du calcul.....	22
1.5. Techniques d'intégration.....	23
1.6. Intégrales impropres.....	25
1.6.1 Intégrales de fonctions non bornées.....	26
1.6.2 Intégrales sur des intervalles semi-infinis.....	27
1.6.3 Intégrales sur tout l'axe réel.....	27
1.6.4 Tests de convergence pour les intégrales impropres.....	28
1.6.5 Le test de l'intégrale pour les séries.....	31
1.7. Sommes de Riemann.....	32
Chapitre 2. Convergence uniforme.....	36
2.1. Convergence simple.....	36
2.2. Convergence uniforme.....	37
2.3. Convergence uniforme et continuité.....	39
2.4. Convergence uniforme et intégration.....	40
2.5. Convergence uniforme et dérivation.....	42
2.6. Convergence uniforme des séries.....	43
2.7. Convergence uniforme et intégrale impropre.....	49
Chapitre 3. Séries entières.....	49
3.1. Rayon de convergence.....	50

* Ces notes sont en grande partie inspirées de mes notes prises en classe au cours d'analyse 2 donné par Thomas Ransford à l'Université Laval à l'automne 2012.

3.2.	Séries entières et convergence uniforme.....	52
3.3.	Dérivation terme à terme des séries entières.....	53
3.4.	Fonctions analytiques.....	55
Chapitre 4.	Fonctions transcendantes.....	58
4.1.	$\exp$	58
4.2.	$\log$	61
4.3.	$\cos$ et $\sin$	63
4.4.	$\arcsin$ et $\arccos$	68
4.5.	$\tan$ et $\arctan$	70
4.6.	$\cosh$ et $\sinh$	73

Introduction

Ce document constitue les notes de cours pour le cours d'analyse 2 à l'Université de Montréal. Ce texte traite de l'analyse des fonctions d'une variable réelle et fait suite à la matière du cours d'analyse 1. Le premier chapitre complète le calcul différentiel et intégral. Les autres chapitres sont plutôt axés sur la théorie des fonctions, plus précisément la notion de suite de fonctions et des différentes convergences, des liens entre la dérivée, l'intégral et la limite et les séries de fonctions et, enfin, la décomposition d'une fonction en une série de Fourier.



Idée inspirée du T_EXbook, les paragraphes comme celui-ci, précédés d'un sinus du topologue, contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetées ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés, le raisonnement devient un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice plus difficile.

Retour sur la continuité uniforme

On rappelle ici la notion de continuité. On verra aussi la continuité uniforme.

Pour toute la section, on considère $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle (borné ou non) et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1. (Continuité) On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue en* $x_0 \in I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, on a

$$|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que f est *continue* si f est continue pour tout $x \in I$.

Définition 2. (Continuité uniforme) On dit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in I$, on a

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exemple 0.0.1. Soit $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Elle est bien sûre continue. Pour voir qu'elle n'est pas uniformément continue, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ensuite, on considère $0 < \delta < \frac{1}{2}$ quelconque (si $\delta \geq \frac{1}{2}$, il suffit de prendre $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{2}$ pour obtenir une contradiction). On restreint x à l'intervalle $(0, \frac{3}{4})$ et on pose $y = x + \frac{\delta}{2}$.

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\
 &= \left| \frac{x - y}{xy} \right| \\
 &= \frac{\delta}{2} \frac{1}{|x(x + \frac{\delta}{2})|} \\
 &\geq \frac{\delta}{2} \frac{1}{|x|} \frac{1}{(1 + \frac{\delta}{2})}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $x < \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{2}} < \frac{1}{2}$ on obtient

$$|f(x) - f(y)| > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

On conclut que f n'est pas uniformément continue.

Le problème de ce contre-exemple est que quand x tend vers 0^+ , f tend vers l'infinie. En fait, on a une réciproque partielle.

Théorème 3. Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si les limites

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

existent, alors f est uniformément continue.

En particulier, si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle compact $[a, b]$, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Si on définit $\tilde{f}$ par

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in (a, b), \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), & \text{si } x = a, \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), & \text{si } x = b, \end{cases}$$

alors $\tilde{f}$ est continue sur $[a, b]$. Si on montre que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur $[a, b]$, alors on aura montré que f est uniformément continue sur (a, b) . Ainsi, il est suffisant de considérer le cas où f est continue sur $[a, b]$.

On suppose que f n'est pas uniformément continue. La négation de la continuité uniforme donne :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \quad (*)$$

Ainsi, soit ce $\varepsilon > 0$ qui vérifie (*). Pour $\delta = \frac{1}{n}$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Ceci définit deux suites (x_n) et (y_n) dans $[a, b]$. Par le théorème

de Bolzano Weierstrass, puisque (x_n) est bornée, il existe une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers, disons, $x \in [a, b]$.

D'une part, on a $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$, donc $y_{n_k} \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow \infty$. D'autre part, si on laisse $k \rightarrow \infty$ dans $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, on trouve

$$|f(x) - f(x)| = 0 \geq \varepsilon,$$

ce qui est une contradiction. D'où f est uniformément continue. □

Exemple 0.0.2. Soit $f(x) = \log x$ sur $(0, \infty)$. Puisque $\log x \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, on conclut que f n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.

Par contre, puisque f est continue sur $[1, 2]$, le théorème affirme que f est uniformément continue.

Morale : « être uniformément continue » dépend du domaine que l'on considère.

La continuité uniforme sera fort utile pour déterminer l'intégrabilité d'une fonction.

Enfin, on rappelle les résultats suivants concernant les fonctions continues.

Théorème des valeurs intermédiaires 4. (TVI) Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ et pour tout c tel que $f(x) < c < f(y)$ ou $f(y) < c < f(x)$, il existe z tel que $x < z < y$ et $f(z) = c$.

Théorème 5. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si I est un intervalle compact, alors f atteint son maximum et son minimum. En particulier, f est bornée.

Retour sur la dérivée d'une fonction

On rappelle que f est *dérivable* en $x \in I$ si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. Dans ce cas, on la note $f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}(x)$. On dit que f est dérivable si f est dérivable pour tout $x \in I$.

On étend la notion de dérivée aux intervalles fermés. Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a, b)$ ou $[a, b]$, on définit la dérivée à gauche par

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

lorsque la limite existe. La limite à droite, sur un intervalle de la forme $(a, b]$ ou $[a, b]$ se définit de façon analogue.

Si on dit que f est dérivable, cela veut dire que f est dérivable en tout $x \in I$, y compris à droite ou à gauche si l'intervalle inclut l'une de ses extrémités.

La définition de la dérivée est équivalente à l'affirmation suivante : il existe $L \in \mathbb{R}$ et une fonction r telle que $r(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ et

$$f(x+h) = f(x) + Lh + r(h)h.$$

Dans ce cas, f est dérivable et $f'(a) = L$. Cela se généralise de la façon suivante.

Théorème des développements limités 6. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$, soit $n \geq 1$ et on suppose que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \varepsilon(h) h^n,$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Un résultat important des fonctions dérivables est le suivant.

Théorème des accroissements finis 7. (TAF) Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) , alors il existe $\xi \in (a, b)$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Corollaire 8. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continument dérivable, alors pour tout $a < b$ dans I , il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $a \leq x \leq y \leq b$, on a

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

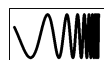
Démonstration. Exercice. □

Le théorème des accroissements finis se généralise par le théorème de Taylor.

Théorème de Taylor 9. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n + 1$ fois dérivable sur I . Soit $a \in I$ et h tel que $a + h \in I$. Alors il existe ξ entre a et $a + h$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}.$$

Classes de fonctions dérivables



Cette section est optionnelle. La matière n'est pas nécessairement difficile, c'est plutôt une question de temps.

Définition 10. Soit I un intervalle (borné ou non).

1. On définit l'ensemble $C^0(I)$ par

$$C^0(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}.$$

2. On définit l'ensemble $C^1(I)$ par

$$C^1(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue}\}.$$

3. Pour $n \geq 2$, on définit

$$C^n(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable et } f' \in C^{n-1}(I)\}.$$

4. On définit l'ensemble $C^\infty(I)$ par

$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I).$$

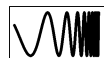
Lorsque $f \in C^n(I)$, on dit que f est de classe C^n .

Autrement dit, $C^n(I)$ est l'espace des fonctions n -fois dérivables dont la dérivée n -ième est continue. L'ensemble $C^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivable. Si I est un intervalle, c'est un ensemble non vide, puisque les fonctions constantes en font partie.

Il en va de soi que l'on a les inclusions suivantes

$$C^\infty(I) \subset \dots \subset C^n(I) \subset \dots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

De plus, les inclusions sont strictes, puisque la fonction $f(x) = (\max\{0, x\})^n$ est $n - 1$ -fois dérivable, mais pas n -fois.



Les ensembles $C^n(I)$ forment un espace vectoriel pour chaque $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. En effet, si $f, g, h \in C^n(I)$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

- (1) $\alpha f \in C^n(I)$;
- (2) $\alpha f + \beta g \in C^n(I)$;
- (3) $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Quelle est alors la dimension de l'espace? En fait, il s'agit d'un espace de dimension *infinie*. L'espace est donc plus difficile à cerner, puisqu'on ne peut pas facilement utiliser une base et des matrices pour travailler. Par exemple, pour $x \in I$, on peut définir une application linéaire $L_x: C^n(I) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L_x(f) = f(x),$$

mais cette application ne se représente pas par une matrice.

Exemple 0.0.3. 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ est de classe $C^\infty(0, \infty)$.

2. $g(x) = |x|$ est de classe $C^0(\mathbb{R})$ et de classe $C^\infty(0, \infty)$.

3. un polynôme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Petit o et grand O

On utilisera la notation du petit o de Landau.

Définition 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit r et h deux fonctions définies sur un voisinage de a . On dit que r est un *petit o* ($o(h(x))$) lorsque $x \rightarrow a$ (dit « petit o de h ») si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{h(x)} = 0.$$

Par abus de notation, on écrit parfois $r(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$. Lorsque le contexte est clair, on écrira simplement $r(x) = o(h(x))$.

Exemple 0.0.4.

- $f(x) = x$ est un petit $o(1)$ lorsque $x \rightarrow 0$ (dit « petit o de 1 »), puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x/1 = 0$. Cependant, f n'est pas un $o(x)$, car $\lim_{x \rightarrow 0} x/x = 1 \neq 0$.
- $g(x) = \sqrt{x}$ est un $o(x^{1/3})$ lorsque $x \rightarrow 0$. En fait, g est un $o(x^\varepsilon)$ pour tout $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$.
- $h(x) = 1 - \cos x$ est un $o(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, car, par la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0.$$

L'exemple suivant illustre un peu mieux comment cette notation sera utile.

Exemple 0.0.5. Définition de la dérivée. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h), \quad (*)$$

pour tout $|h|$ assez petit. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = A$.

Démonstration. On suppose que f est dérivable. Dans ce cas, on pose

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h,$$

où h est assez petit pour que f soit définie en $x_0 + h$. On voit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

et donc r est un $o(h)$. Ainsi, l'équation $(*)$ est vérifiée avec $A = f'(x_0)$.

Maintenant, on suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $(*)$ est vraie. On a alors

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{o(h)}{h}.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, le côté droit converge vers A , donc le côté gauche converge également. Ainsi, on a bien que $f'(x_0)$ existe et $f'(x_0) = A$. □

En fait, cet exemple s'applique aussi aux développements limités.

Exercice 1. Développements limités. Montrer que si f est n -fois dérivable en x_0 , alors

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

Proposition 12. La notation du petit o vérifie les propriétés suivantes :

1. si $g = o(f)$ et $h = o(f) + o(g)$, alors $h = o(f)$;
2. Si $h = fo(g)$, alors $h = o(fg)$.

Démonstration. 1. Si $g = o(f)$, alors $\frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$. Soit $k = o(f)$ et $m = o(g)$ telles que $h = k + m$. On a

$$\frac{h}{f(x)} = \frac{k(x) + m(x)}{f(x)} = \frac{k(x)}{f(x)} + \frac{m(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$$

Conclusion : h est un $o(f)$.

2. Il suffit de voir que

$$\frac{f(x)o(g(x))}{f(x)g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$$

D'où $fo(g)$ est un $o(fg)$. □

Exemple 0.0.6. Si $p(x) = x + x^2$, alors p est un $o(1)$. Or, on voit que $p(x)^n = o(x^{n-1})$. Cela ne contredit pas la proposition, car $\frac{p(x)^n}{1} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, donc on a aussi $p(x)^n = o(1)$.

Morale : le signe d'égalité pour le petit o est une notation. Il dit que le côté gauche possède la propriété voulue. Ainsi, il faut éviter des expressions comme $o(f) = o(g)$.

Exemple 0.0.7. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^n}{x^{2n}}$. Le développement limité de $\cos x$ en 0 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{(\cos x - 1)^n}{x^{2n}} &= \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1)^n}{x^{2n}} \\ &= \frac{(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^n}{x^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^n \frac{1}{2^n} x^{2n} + o(x^{2n})}{x^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} + o(1). \end{aligned}$$

On voit que la limite lorsque $x \rightarrow 0$ vaut $\frac{(-1)^n}{2^n}$.

La prochaine notation est celle du grand O . Elle est particulièrement utile en informatique, pour l'analyse d'algorithme.

Définition 13. 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que f est un *grand* $O(g(x))$ lorsque $x \rightarrow \infty$ s'il existe $M \geq a$ et $C > 0$ tels que pour tout $x \geq M$, on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 . On dit que f est un *grand* $O(g(x))$ lorsque $x \rightarrow x_0$ s'il existe $C, m > 0$ tel que si $|x - x_0| < m$, alors on a

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Lorsque le contexte est clair, on ne précisera pas vers quelle valeur x tend. On commence par le cas où $x \rightarrow \infty$.

Exemple 0.0.8.

- $f(x) = x$ est un $O(x)$, puisque $x \leq x$ pour tout x . En fait, f est un $O(x^n)$ pour tout $n \geq 1$.
- Une fonction bornée g est un $O(1)$, car $g(x) \leq C$ pour tout x . Par exemple, $g(x) = \sin(x)$ est un $O(1)$.
- $h(x) = e^x$ n'est pas un $O(x^n)$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $f, g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

Ensuite, on s'attarde au grand O lorsque $x \rightarrow a$. Voici des exemples.

Exemple 0.0.9.

- $f(x) = x$ est un $O(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- $g(x) = \sin x$ est un $O(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- $h(x) = e^x$ est un $O(1)$ lorsque $x \rightarrow a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $a > 0$ et $f, g: (-a, a) \rightarrow (0, \infty)$. Montrer que si la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, alors f est un $O(g(x))$.

On a vu que le petit o est intimement lié aux développements limités. Le grand O est quant à lui lié au développement de Taylor.

Théorème 14. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I . Alors pour $|h|$ assez petit, on a

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + O(h^{n+1}).$$

Démonstration. Par le théorème de Taylor, pour h si petit que f est définie sur $[x-h, x+h]$, il existe ξ tel que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

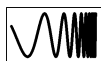
Ainsi, on voit que

$$\left| f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} \right| = |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|h^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

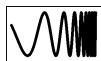
Puisque $f^{(n+1)}$ est continue, la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur l'intervalle $[x-h, x+h]$, disons par C . On a donc

$$\left| f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} \right| \leq \frac{C}{(n+1)!} |h^{n+1}|,$$

d'où la conclusion. □



Comment cette notation est-elle utile en informatique? Lorsqu'on analyse un algorithme, il est important de savoir si l'algorithme effectue un grand nombre d'opérations. Comme il est bien trop difficile de calculer explicitement ce nombre, on utilise des ordres de grandeur. C'est là où la notation grand O est utile.



Exemple 15. On considère le programme suivant qui permet de déterminer si un nombre x appartient à une liste ordonnée L de nombres*.

Fonction chercher x dans L .

Soit x un nombre et $L = (x_1, \dots, x_n)$ une liste ordonnée de nombres de longueur n .

1. Choisir $a \leftarrow 1$ et $b \leftarrow n$.

2. **Tant que** $a \leq b$:

choisir $m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$.

Si $x = x_m$,

renvoyer m ,

sinon si $x < x_m$,

choisir $b \leftarrow m - 1$,

sinon si $x > x_m$,

choisir $a \leftarrow m + 1$.

3. **Renvoyer** $\emptyset$. // Si on se rend ici, on n'a rien trouvé.

Le but de l'exemple n'est pas de vérifier que l'algorithme fonctionne, mais plutôt de vérifier qu'il est *efficace*. On détermine l'efficacité en fonction de la longueur de la liste n .

On définit une fonction $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit : $f(n)$ désigne le nombre d'opérations effectuées pour accomplir l'algorithme pour une liste L de longueur n dans le cas où la recherche est la plus longue possible. Calculer f explicitement serait bien trop difficile, voire impossible. Au lieu, on montre que $f(n) = O(\log n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

L'idée est la suivante : la boucle de l'étape 2 peut s'effectuer au plus $\lfloor \log_2 n \rfloor + 2$ fois, car à la j -ième itération, on voit que

$$b - a \leq \frac{n + 1}{2^j}$$

et pour $j = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2$, on a

$$2^j = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 + 1} = 2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \geq 2 \cdot 2^{\log_2 n} = 2n.$$

Ainsi, il s'ensuit que

$$b - a \leq \frac{n + 1}{2^j} \leq \frac{n + 1}{2n} < 1,$$

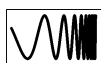
donc $b = a$ puisque b et a sont entiers.

Ensuite, si à chaque fois que l'on exécute la boucle, on effectue au plus C opérations, on obtient la borne

$$f(n) \leq C(\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) + D,$$

où D est le nombre d'opérations effectuées dans les autres étapes à l'extérieur de la boucle et qui ne dépend pas de n . Ceci montre que $f(n) = O(\log_2 n)$. Enfin, puisque $\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$, on a également $f(n) = O(\log n)$.

* Le pseudo-code est inspiré de la documentation de Python.



Habituellement, on dit qu'un algorithme est efficace lorsque le nombre d'opérations est de l'ordre d'un grand $O(\text{polynôme})$ dans la dimension qui croît (dans l'exemple précédent, cette dimension est la longueur de la liste). Si l'ordre de grandeur est un grand $O(\log n)$, c'est encore mieux!

Fonctions élémentaires

Au chapitre 4, on verra les propriétés des fonctions transcendantes importantes. En attendant, on tient pour acquis l'existence et les propriétés des fonctions suivantes. Ces fonctions seront souvent utilisées dans les exemples, mais jamais dans les démonstrations, de sorte qu'il n'y ait à aucun moment un argument circulaire.

Fonction	Dérivée	Primitive (+ C)	Propriétés	Valeurs spéciales
$\exp x$	$\exp x$	$\exp x$	$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$	$\exp(0) = 1$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x \log x - x$	$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$	$\log e = 1$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ etc.	$\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$, etc.
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	voir sin	$\cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0$, etc.
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\log(\sec x)$	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ etc.	$\tan 0 = 0, \tan \frac{\pi}{4} = 1$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\arctan(\cos x)$	voir tan	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$	$\arcsin 0 = 0$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$		

Chapitre 1

Calcul intégral

1.1. Définition de l'intégrale de Riemann

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le but est donner un sens précis à la notion « d'aire sous la courbe ». Pour ce faire, on introduit quelques définitions.

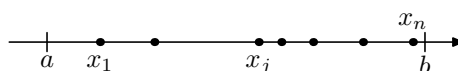
Définition 1. Une *subdivision* (partition) de $[a, b]$ est un sous-ensemble fini

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

de $[a, b]$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

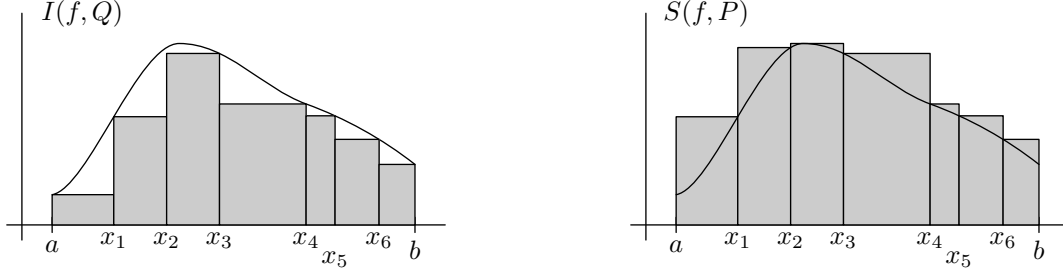
Par abus de notation, on notera une partition par $P = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$.



Définition 2. (Sommes de Darboux). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$. Alors on définit

$$S(f, P) := \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \quad \text{où } M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

$$I(f, P) := \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \quad \text{où } m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f.$$



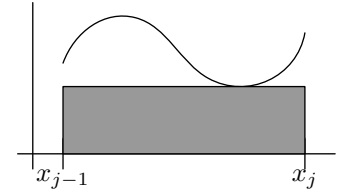
Lemme 3. (de raffinement). Soit P et Q deux partitions de $[a, b]$. Si $P \subseteq Q$, alors

$$I(f, P) \leq I(f, Q) \quad \text{et} \quad S(f, P) \geq S(f, Q).$$

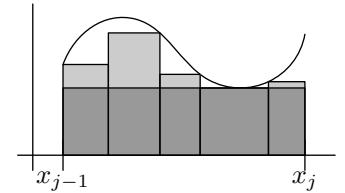
Démonstration. On écrit $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$. Par hypothèse, on a $P \subseteq Q$, ainsi l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ se subdivise par une partition Q_j des points de Q . Ainsi, si on montre que $I(f, \{x_{j-1}, x_j\}) \leq I(f, Q_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$, on aura $I(f, P) \leq I(f, Q)$. Il est donc suffisant de considérer le cas $P = \{a, b\}$ et Q une partition de $[a, b]$.

On écrit $Q = \{y_0 < \dots < y_n\}$, $m_j = \inf_{[y_{j-1}, y_j]} f$ pour $1 \leq j \leq n$ et $m = \inf_{[a, b]} f$. Comme $[y_{j-1}, y_j] \subseteq [a, b]$, on a $m_j \geq m$. Il suit que

$$\begin{aligned} I(f, P) &= m(b - a) \\ &= m \sum_{j=1}^n (y_{j-1} - y_j) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \sum_{j=1}^n m(y_{j-1} - y_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n m_j(y_{j-1} - y_j) \\ &= I(f, Q). \end{aligned}$$



Représentation géométrique du terme $I(f, [x_{j-1}, x_j])$ de la somme $I(f, P)$.



Subdivision de $[x_{j-1}, x_j]$ par des points de Q .

La démonstration de $S(f, P) \geq S(f, Q)$ est analogue.

□

Lemme 4. Pour toutes partitions P, Q de $[a, b]$, on a $I(f, P) \leq S(f, Q)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} I(f, P) &\stackrel{(1)}{\leq} I(f, P \cup Q) \\ &\leq S(f, P \cup Q) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} S(f, Q), \end{aligned}$$

où on obtient (1) et (2) en appliquant le lemme de raffinement. □

Définition 5. On définit les *intégrales supérieure* et *inférieure* respectivement par

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_P \{S(f, P)\} \quad \text{et} \quad \underline{\int_a^b} f := \sup_P \{S(f, P)\},$$

où l'infimum et le supremum sont pris sur toutes les subdivisions P possibles de $[a, b]$. ****

Lemme 6. $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Démonstration. On a $I(f, P) \leq S(f, Q)$ pour tout P, Q . Prenons $\sup_P$:

$$\underline{\int_a^b} f \leq S(f, Q) \quad \text{pour tout } Q.$$

Prenons $\inf_Q$:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

□

Définition 7. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Elle est *intégrable* (au sens de Riemann) si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Dans ce cas, on note la valeur commune $\int_a^b f$ (ou $\int_a^b f(x)dx$). ****

Remarque. De façon équivalente, f est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition P de $[a, b]$ telle que $|S(f, P) - I(f, P)| < \varepsilon$. (Exercice.) ****

Exemple 1.1.1. $f(x) = c$ (const.) sur $[a, b]$.

Prenons $P = \{a, b\}$. Alors

$$S(f, P) = c(b - a),$$

$$I(f, P) = c(b - a).$$

On a donc $\overline{\int_a^b f} \leq c(b - a)$ et $\underline{\int_a^b f} \geq c(b - a)$. On conclut que

$$c(b - a) \leq \underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f} \leq c(b - a),$$

c'est-à-dire que $\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f} = c(b - a)$. Conclusion : $\int_a^b f = c(b - a)$.

Remarque. Cet exemple démontre que l'aire sous la courbe d'une droite horizontale correspond bien à l'aire d'un rectangle.

Exemple 1.1.2. $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$.

Soit $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. On a alors

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^2 \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{1}{6n^3} (n(n+1)(2n+1)) \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &\longrightarrow \frac{1}{3} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\overline{\int_0^1 f} \leq \frac{1}{3}.$$

De même, on a

$$I(f, P_n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n (j-1)^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \\
&= \frac{1}{6n^3} (n-1)n(2n-1) \\
&= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{3} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Il suit que

$$\underline{\int_0^1 f} \geq \frac{1}{3}.$$

Pour résumé, on a obtenu

$$\begin{array}{c}
\text{résultat} \\
\text{général} \\
\downarrow \\
\frac{1}{3} \leq \underline{\int_0^1 f} \leq \overline{\int_0^1 f} \leq \frac{1}{3}.
\end{array}$$

Conclusion : $f(x) = x^2$ est intégrable sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$.

Exemple 1.1.3. (Somme de Riemann). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n , des partitions de $[a, b]$ telles que

$$\left| I(f, P_n) - \underline{\int_a^b f} \right| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left| S(f, Q_n) - \overline{\int_a^b f} \right| < \frac{1}{n}.$$

On pose $R_n = P_n \cup Q_n$. Il suit que

$$\left| I(f, R_n) - \underline{\int_a^b f} \right| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left| S(f, R_n) - \overline{\int_a^b f} \right| < \frac{1}{n}.$$

Ensuite, on écrit $R_n = \{x_{n,0}, \dots, x_{n,k_n}\}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq k_n$, on choisit un nombre $x_{n,j}^* \in [x_{n,j-1}, x_{n,j}]$. Puisque

$$\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \leq f(x_{n,j}^*) \leq \sup_{[x_{n,j-1}, x_{n,j}]},$$

on obtient

$$I(f, R_n) \leq \sum_{j=1}^{k_n} f(x_{n,j}^*)(x_{n,j} - x_{n,j-1}) \leq S(f, R_n).$$

En laissant $n \rightarrow \infty$, par le théorème des deux gendarmes, on obtient

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(x_{n,j}^*)(x_{n,j} - x_{n,j-1}).$$

1.2. Propriétés de l'intégrale

1. Soit $a < c < b$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2. Si f, g sont intégrables sur $[a, b]$, alors $f + g$ l'est aussi et

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

3. Si f est intégrable sur $[a, b]$, et si $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b cf = c \left(\int_a^b f \right).$$

4. Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Démonstration. On fait 1 et 2 et on laisse 3 et 4 en exercice.

1. On montre d'abord que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. (Ceci est toujours vrai, que f soit intégrable ou non.) Soit R une partition de $[a, b]$. Il existe des partitions P de $[a, c]$ et Q de $[c, b]$ telles que $R \cup \{c\} = P \cup Q$. On a donc

$$\begin{aligned} I(f, R) &\leq I(f, R \cup \{c\}) \\ &= I(f, P \cup Q) \\ &= I(f, P) + I(f, Q) \\ &\leq \int_a^c f + \int_c^b f. \end{aligned}$$

Si on prend le supremum sur toutes les partitions R de $[a, b]$, on trouve

$$\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Soit maintenant U une partition de $[a, c]$ et V une partition de $[c, b]$. Il est clair que $U \cup V$ est une partition de $[a, b]$, donc on a

$$I(f, U) + I(f, V) = I(f, U \cup V) \leq \int_a^b f.$$

Si on prend le supremum sur les partitions U de $[a, c]$ et le supremum sur les partitions V de $[c, b]$, alors on obtient

$$\int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b f.$$

En combinant les deux inégalités, on conclut que $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

On laisse en exercice de démontrer que $\overline{\int_a^c f} + \overline{\int_c^b f} = \overline{\int_a^b f}$.

Si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors on a bien $\int_a^c f = \overline{\int_a^c f}$ et $\int_c^b f = \overline{\int_c^b f}$ et donc f est intégrable sur $[a, b]$.

Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors on a

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \overline{\int_a^c f} + \overline{\int_c^b f}.$$

Cette égalité est seulement possible si $\int_a^c f = \overline{\int_a^c f}$ et $\int_c^b f = \overline{\int_c^b f}$, car l'intégrale inférieure est plus petite que l'intégrale supérieure.

2. Prenons des subdivisions P, Q de $[a, b]$. Alors

$$\begin{aligned} S(f, P) + S(g, Q) &\geq S(f, P \cup Q) + S(g, P \cup Q) \\ &\geq S(f + g, P \cup Q) && (\sup_A (f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g) \\ &\geq \int_a^b (f + g). \end{aligned}$$

Pour résumer, on a obtenu $S(f, P) + S(g, Q) \geq \int_a^b (f + g)$. Prenons $\inf_P$ et $\inf_Q$:

$$\int_a^b f + \int_a^b g \geq \int_a^b (f + g).$$

De la même façon, on obtient

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g).$$

À nouveau, pour résumer, on a obtenu

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f + g) \leq \overline{\int_a^b (f + g)} \leq \overline{\int_a^b f} + \overline{\int_a^b g}.$$

Comme f et g sont intégrables, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \overline{\int_a^b f} = \int_a^b f \\ \text{et } \int_a^b g &= \overline{\int_a^b g} = \int_a^b g. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\int_a^b (f + g) = \overline{\int_a^b (f + g)},$$

d'où $f + g$ est intégrable et

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

□

Exemple 1.2.1. Soit $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ x^2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Puisque f est intégrable sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$, il suit que f est intégrable sur $[0, 2]$, même si f n'est pas continue.

Inégalité triangulaire

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration. On a d'une part

$$f \leq |f| \stackrel{4}{\Rightarrow} \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

et d'autre part

$$-f \leq |f| \stackrel{4.}{\Rightarrow} \int_a^b -f \stackrel{3.}{=} - \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Donc on obtient

$$\pm \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

ce qui veut dire que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

1.3. Intégrabilité des fonctions continues

Théorème 1. *Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est intégrable.*

On rappelle que si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée et f est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, on a

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Prenons une subdivision $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ telle que $x_j - x_{j-1} \leq \delta$ pour tout j . Par (*), il suit que

$$\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \leq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f + \varepsilon$$

pour chaque j , c'est-à-dire que

$$M_j \leq m_j + \varepsilon \quad \forall j. \quad (**)$$

Puisque f est bornée, il s'ensuit que $S(f, P)$ et $I(f, P)$ sont bien définis. On a donc

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b f} &\leq S(f, P) \\ &= \sum_{j=1}^n M_j (x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (m_j + \varepsilon) (x_j - x_{j-1}) \quad (\text{par } (**)) \\ &= \sum_{j=1}^n m_j (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^n \varepsilon (x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I(f, P) + \varepsilon(b - a) \\
&\leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon(b - a).
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon(b - a) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

On conclut que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

c'est-à-dire que f est intégrable.

□

Exemple 1.3.1. 1. Tout polynôme est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$.

2. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $(0, 1]$, même si elle y est continue. En effet, elle n'est même pas bornée.

3. La fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est intégrable. En effet, elle est continue sur $[0, 1]$.

La fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est-elle intégrable?

La réponse est oui, mais on ne peut pas faire appel au théorème précédent.

Corollaire 2. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, sauf en un nombre fini de points, et si f est bornée, alors f est intégrable.

Démonstration. Soit $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ les points de discontinuité de f dans (a, b) . On pose $x_0 := a$ et $x_{n+1} := b$. Soit $M \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta := \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2M(n+2)}, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_{n+1} - x_n| \right\}$. Pour $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, sur l'intervalle $[x_{j-1} + \delta, x_j - \delta]$, f est continue, donc il existe une partition P_j de cet intervalle telle que $S(f, P_j) - I(f, P_j) < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$.

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, sur l'intervalle $[x_j - \delta, x_j + \delta]$, comme f est bornée, pour une partition quelconque de cet intervalle Q_j , on a

$$I(f, P) \geq -2M\delta \geq -\frac{\varepsilon}{2(n+2)} \quad \text{et} \quad S(f, P) \leq 2M\delta \leq \frac{\varepsilon}{2(n+2)}. \quad (*)$$

De même, pour $[x_0, x_0 + \delta]$ et $[x_{n+1} - \delta, x_{n+1}]$, on a également des partitions Q_0 et Q_{n+1} qui vérifient (*).

Enfin, on pose $R = P_1 \cup \dots \cup P_{n+1} \cup R_0 \cup \dots \cup R_{n+1}$ une partition de $[a, b]$. On a

$$\begin{aligned} S(f, R) - I(f, R) &= \sum_{j=1}^{n+1} (S(f, P_j) - I(f, P_j)) + \sum_{j=0}^{n+1} (S(f, R_j) - I(f, R_j)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\varepsilon}{2(n+2)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

1.4. Théorème fondamental du calcul

Théorème fondamental du calcul 1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Prenons $c \in [a, b)$ et $h > 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) &= \int_a^{c+h} f - \int_a^c f \\ &= \int_c^{c+h} f. \end{aligned}$$

On a

$$h \inf_{[c, c+h]} f \leq \int_c^{c+h} f \leq h \sup_{[c, c+h]} f$$

et donc

$$\inf_{[c, c+h]} f \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq \sup_{[c, c+h]} f.$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$, on sait que

$$\inf_{[c, c+h]} f \rightarrow f(c) \quad \text{et} \quad \sup_{[c, c+h]} f \rightarrow f(c)$$

puisque f est continue.

Par le théorème des deux gendarmes, ceci implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Le même argument pour $h < 0$ montre que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Conclusion : F est dérivable en c et $F'(c) = f(c)$.

□

Théorème fondamentale du calcul 2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $F' = f$. Alors

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Démonstration. On pose

$$F_1(x) = \int_a^x f.$$

D'après le TFC1, on sait que $F_1' = f$. Aussi, par hypothèse, on a $F' = f$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (F_1 - F)' &= F_1' - F' \\ &= f - f \\ &= 0. \end{aligned}$$

On conclut que $F_1 - F = C$, une constante. En particulier, on a

$$\begin{aligned} F(b) - F_1(b) &= F(a) - F_1(a) \\ F(b) - \int_a^b f &= F(a) - 0 \\ \int_a^b f &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

Remarque. La fonction F s'appelle une *primitive* de f . Selon le TFC1, une primitive existe toujours (lorsque f est continue) et selon le TFC2, une primitive est unique à l'addition d'une constante près. Souvent, on écrit $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Exemple 1.4.1. $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$

On peut prendre $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. On obtient

$$\int_0^1 f = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = \frac{1}{3}.$$

1.5. Techniques d'intégration

1. Intégration par partie

Soit $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables avec u', v' continues. Alors

$$\int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vu'.$$

Démonstration. $\int_a^b uv' + \int_a^b u'v = \int_a^b (uv' + v'u)$

$$= \int_a^b (uv)'$$

$$\stackrel{TFC2}{=} u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

□

Exemple 1.5.1. $\int_a^b \log x dx = \left[x \log x \right]_a^b - \int_a^b x \frac{1}{x} dx$ $= \left[x \log x - x \right]_a^b.$	$u = \log x \quad dv = \frac{1}{x} dx$ $du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$
--	---

2. Intégration par substitution

Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g: [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction continue, dérivable et avec g' continue. Alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Remarque. Si $g(a) > g(b)$, alors il faut interpreter

$$\int_{g(a)}^{g(b)} = - \int_{g(b)}^{g(a)}.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[c, d]$. Alors, d'une part, on a

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \stackrel{\text{TFC2}}{=} F(g(b)) - F(g(a)).$$

(Vrai même si $g(a) > g(b)$.) D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_a^b F'(g(x))g'(x)dx \\ &= \int_a^b (F \circ g)'(x)dx \\ &= F \circ g(b) - F \circ g(a) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.5.2. On pose $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. On a

$$\begin{aligned} L(xy) &= \int_1^{xy} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \\ &= L(x) + \int_1^y \frac{x du}{xu} \\ &= L(x) + L(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{t}{x} \\ x du &= dt \end{aligned}$$

3. Simplification algébrique

Exemple 1.5.3. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 (u^{1/2} - u^{-1/2}) du \\ &= \left[\frac{2}{3} u^{3/2} - 2u^{1/2} \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x + 1 \\ du &= dx \end{aligned}$$

4. Simplification trigonométrique

Exemple 1.5.4. $\int \cos x \cos(2x) dx = \int \frac{\cos x + \cos(3x)}{2} dx$

$$= \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin(3x)}{6}.$$

5. Fractions partielles

Exemple 1.5.5. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)}$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x+1) \end{aligned}$$

1.6. Intégrales impropres

1.6.1 Intégrales de fonctions non bornées

La définition de $\int_a^b f$ prend pour acquis que f soit bornée sur $[a, b]$. Il arrive parfois que f est bornée sur $[a + \varepsilon, b]$ pour chaque $\varepsilon > 0$, mais pas sur $[a, b]$ lui-même. Dans ce cas, on peut considérer $\int_{a+\varepsilon}^b f$ si elle existe et si

$$\int_{a+\varepsilon}^b f \rightarrow \ell \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ converge et on écrit

$$\int_a^b f = \ell.$$

(De même, si la singularité est en b , alors on considère $\int_a^{b-\varepsilon} f$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.)

Exemple 1.6.1. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sur $(0, 1]$ avec $\alpha > 0$.

On a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha})$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1 - \alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ \infty, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \log(1) - \log(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Conclusion : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $0 < \alpha < 1$ et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$, et diverge si $\alpha \geq 1$.

Remarque. Si une fonction f est définie sur $[a, b) \cup (b, c]$, il se peut que la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right)$$

existe même si les intégrales impropres $\int_a^b f$ ou $\int_b^c f$ divergent. Dans ce cas, on écrit

$$\text{v.p.} \int_a^c f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right).$$

On appelle v.p. $\int_a^c f$ la *valeur principale* de $\int_a^c f$.

Exemple 1.6.2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ sur $[0, 3]$.

D'abord, on voit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(|-\varepsilon|) - \log(|-1|) = -\infty,$$

donc l'intégrale impropre diverge. Essayons de calculer la valeur principale. On a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x-1} \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(|-\varepsilon|) - \log(|-1|) \\ &\quad + \log(2) - \log(|\varepsilon|) \\ &= \log 2. \end{aligned}$$

1.6.2 Intégrales sur des intervalles semi-infinis

On suppose que $\int_a^x f$ existe pour tout $x \geq a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f = \ell,$$

alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^\infty f$ converge et on écrit

$$\int_a^\infty f = \ell.$$

(De même pour $\int_{-\infty}^a f$ en considérant $\int_x^a f$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.)

Exemple 1.6.3. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, \infty)$ pour $\alpha > 0$.

On a

$$\int_1^y \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{si } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

et si $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^y \frac{dx}{x} = \log y - \log 1 \rightarrow \infty \quad y \rightarrow \infty.$$

Exemple 1.6.4. Soit $f(x) = \frac{1}{[x]}$ sur $[1, \infty)$, où $[x]$ est la partie entière de x . Pour tout $n > 1$ entier, on a

$$\int_1^n f = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc l'intégrale $\int_1^\infty f$ diverge.

1.6.3 Intégrales sur tout l'axe réel

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ converge si les deux intégrales $\int_0^{\infty} f$ et $\int_{-\infty}^0 f$ convergent toutes les deux. Dans ce cas, on écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f.$$

Remarques. 1. Au lieu de faire la séparation en 0, on peut la faire en tout point $a \in \mathbb{R}$. Cela ne change ni la convergence, ni la valeur.

2. Il se peut la limite

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y f$$

existe même si $\int_{-\infty}^{\infty} f$ diverge. Dans ce cas, on écrit

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y f.$$

On appelle v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f$ la *valeur principale* de $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Exemple 1.6.5. $f(x) = x$

On voit d'abord que

$$\int_0^y x dx = \frac{1}{2}y^2$$

qui diverge lorsque $y \rightarrow \infty$. Donc $\int_0^{\infty} x dx$ diverge, ainsi que $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$. Cependant,

$$\int_{-y}^y x dx = 0$$

pour tout y , donc v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$.

1.6.4 Tests de convergence pour les intégrales impropres

1. Le test de comparaison

Soit $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

pour tout $x \geq a$. Si $\int_a^{\infty} g$ converge, alors $\int_a^{\infty} f$ converge aussi. (Donc si $\int_a^{\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{\infty} g$ diverge aussi.)

Démonstration. On pose $F(x) = \int_a^x f$. On a que

- F est croissante (si $y \geq x$, alors $F(y) - F(x) = \int_x^y f \geq 0$).
- $F(x)$ est majorée (en effet, $F(x) = \int_a^x f \leq \int_a^x g \leq \int_a^{\infty} g$).

Il s'ensuit que $F(x)$ converge vers une limite (finie) lorsque $x \rightarrow \infty$.

□

Exemple 1.6.6. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, \infty)$. On a $0 < [x] \leq x < [x] + 1$. Par le test de comparaison, on a que $\int_1^\infty f$ diverge. En effet, on voit que

$$0 < \frac{1}{[x] + 1} < \frac{1}{x} = f(x)$$

et on sait que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{[x] + 1}$$

diverge, par l'exemple 1.6.0.

2. La convergence absolue implique la convergence

Soit $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_a^\infty |f|$ converge, alors $\int_a^\infty f$ converge aussi.

Démonstration. On remarque que si $\int_a^\infty |f|$ converge, alors $\int_a^\infty 2|f|$ converge. De plus, on a

$$0 \leq f + |f| \leq 2|f|$$

partout. Donc, par le test de comparaison, il suit que

$$\int_a^\infty (f + |f|)$$

converge. Enfin, on a

$$\int_a^x f = \int_a^x (f + |f|) - \int_a^x |f| \longrightarrow \int_a^\infty (f + |f|) - \int_a^\infty |f| \quad \text{lorsque } x \rightarrow \infty.$$

□

On revient maintenant à l'exemple

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2} dx.$$

On note que

$$\left| \frac{\cos x}{1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

et on sait que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge.

Par le test de comparaison, on conclut que

$$\int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{1 + x^2} \right| dx$$

converge. Comme la convergence absolue implique la convergence, il suit que

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2} dx$$

converge également.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{\cos x}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx + \int_1^y \frac{\cos x}{1+x^2} dx \\ &\longrightarrow \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx + \int_1^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx.\end{aligned}$$

Remarque. Montrer la convergence de $\int_a^\infty f$ et trouver sa valeur sont deux problèmes différents. En général, le deuxième est plus difficile. En fait, on peut montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

par des techniques de l'analyse complexe.



Les intégrales complexes peuvent parfois être évalué à l'aide de leurs *résidus*. Le prochain calcul n'a aucun lien avec la matière du cours. On pose

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2},$$

une fonction de la variable complexe $z = x + iy$. Lorsque $y = 0$, on trouve

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{1+x^2} = \frac{\cos x}{1+x^2} + \frac{i \sin x}{1+x^2}.$$

Cette fonction possède un résidu en $z = i$ et $z = -i$. On s'intéresse seulement à celui en i , puisqu'on intégrera seulement autour de ce résidu. Dans notre cas, le résidu se calcule par

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z + i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Soit γ_n le lacet composé de l'intervalle $[-n, n]$ et du demi-cercle C_n de rayon n , centré en 0 partant de l'axe réel positif jusqu'à l'axe réel négatif. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, on pose

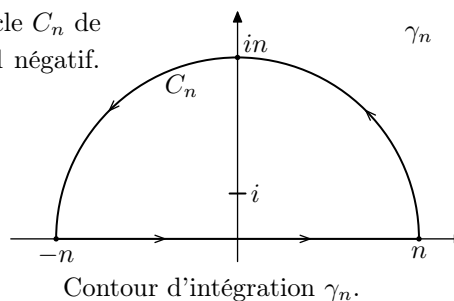
$$I_n = \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz.$$

Par le théorème des résidus, on a l'équation

$$I_n = 2i\pi \text{Res}(f, i) = \frac{2i\pi}{2ie} = \frac{\pi}{e}.$$

Ensuite, l'intégrale sur le demi-cercle s'approche de 0 lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| &\leq \int_{C_n} \frac{|e^{iz}|}{|1+z^2|} |dz| \\ &\leq \int_{C_n} \frac{|e^{iz}|}{|z|^2 - 1} |dz|\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& |dz| = |dx + idy| \\
& = \int_{C_n} \frac{e^{-y}}{n^2 - 1} |dz| = \int_{C_n} \frac{e^{-y}}{n^2 - 1} \sqrt{(-n \cos \theta)^2 + (n \sin \theta)^2} d\theta \\
& = \int_0^\pi \frac{ne^{-n \sin \theta}}{n^2 - 1} d\theta = nd\theta \\
& \leq \frac{n}{n^2 - 1} \int_0^\pi d\theta \quad (\text{car } e^{-n \sin \theta} \leq 1) \\
& \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

On peut maintenant conclure

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-n}^n \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz + \int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz \right) \quad (\text{car } \gamma_n \text{ est composé de } C_n \text{ et de } [-n, n]) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz + 0 \quad (\text{car } \int_{C_n} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz \rightarrow 0) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{e^{ix}}{1 + x^2} dx \quad (\text{car } y = 0 \text{ sur } [-n, n]) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{\cos x + i \sin x}{1 + x^2} dx
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\cos x}{1+x^2}$ est paire et que $\frac{\sin x}{1+x^2}$ est impaire, on a

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^n \frac{\cos x}{1 + x^2} dx + 0.$$

On conclut que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

1.6.5 Le test de l'intégrale pour les séries

La série $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log n}$ converge-t-elle? Les tests vu en analyse 1 échouent sur cet exemple. L'intégrale fournit un test plus raffiné.

Test de l'intégrale Soit $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (continue) positive et décroissante. Alors

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x) dx \text{ converge}.$$

Démonstration. Pour $x \in [k-1, k]$, on a $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$ et donc

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1).$$

Additionner ces inégalités pour $k = 2, 3, \dots, n$ donne

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$

De l'inégalité de gauche, on obtient que

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \text{ diverge} \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ diverge}.$$

De l'inégalité de droite, on trouve

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \text{ diverge}.$$

□

Exemple 1.6.7. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ (positive et décroissante si $\alpha > 0$).

On a vu que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Par le test de l'intégrale, il suit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Exemple 1.6.8. $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\beta}$ sur $[2, \infty)$ (positive et décroissante si $\beta > 0$).

On a

$$\int_2^y \frac{dx}{x(\log x)^\beta} = \int_{\log 2}^{\log y} \frac{du}{u^\beta}$$

$$\begin{aligned} u &= \log x \\ du &= \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \text{limite} \Leftrightarrow \beta > 1.$$

Par le test de l'intégrale, il suit que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\beta} \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1.$$

En particulier, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ diverge.

Exemple 1.6.9. $f(x) = \sin^2(\pi x)$.

On voit que $\int_0^\infty \sin^2(\pi x) dx$ diverge, mais

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(\pi k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0$$

converge.

Le test de l'intégrale ne s'applique pas, puisque f n'est pas décroissante.

1.7. Sommes de Riemann

Les sommes $S(f, P)$ et $I(f, P)$ sont appelés *sommes de Darboux*. On présente brièvement le point de vue équivalent de Riemann.

Définition 1. 1. Soit $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$. On appelle le tuple $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un *test* si $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $1 \leq j \leq n$.
2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit la *somme de Riemann* $R(f, P, \xi)$ par

$$R(f, P, \xi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

3. La *largeur* d'une partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ est

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}).$$

Le point 1 de la définition n'est pas standard dans la littérature. On introduit la terminologie d'un test seulement pour alléger le texte.

Remarque. On voit que

$$I(f, P) \leq R(f, P, \xi) \leq S(f, P) \tag{1}$$

pour tout test ξ .

Les sommes de Darboux sont plus faciles à utiliser pour la théorie. Pour le calcul numérique, les sommes de Riemann sont probablement plus utiles. De toute façon, une intégrale sera habituellement approximée par une méthode numérique telle la méthode de Simpson.

Théorème d'équivalence des sommes de Darboux et de Riemann 2. *Soit une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Alors f est intégrable si et seulement si f satisfait au critère de Riemann : il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|P\| < \delta$, alors*

$$|R(f, P, \xi) - S| < \varepsilon$$

pour tout test ξ . Dans ce cas, on a $S = \int_a^b f$.

On voit que le théorème porte sur les fonctions bornées. Si f vérifie le critère de Riemann, elle est automatiquement bornée, donc on ne perd pas généralité. En effet, si f n'était pas bornée, pour une partition P telle que pour tout test ξ , on a $|R(f, P, \xi) - S| < \varepsilon$, on pourrait choisir une suite (ξ_n) de sorte que $R(f, P, \xi_n) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui est une contradiction.

Lemme 3. Si f est intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition P , on ait

$$\text{si } \|P\| < \delta, \text{ alors } S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $P_\varepsilon = \{y_0, \dots, y_d\}$ telle que

$$S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition telle que $\|P\| < \delta$, où δ sera déterminé plus tard. Pour $0 \leq j \leq d$, on définit $\{z_\ell^j\}_\ell$ de sorte que

$$P \cup \{y_0, \dots, y_j\} = \{z_0^j, \dots, z_{n+j}^j\}$$

et on pose

$$M_\ell^j = \sup_{[z_{\ell-1}^j, z_\ell^j]} f \quad \text{et} \quad M = \sup_{[a, b]} f.$$

La suite est un peu technique, donc allons-y avec soin. Il existe k tel que $y_{j+1} \in [z_{k-1}^j, z_k^j]$. Il s'ensuit que

- pour $\ell < k$, on a $z_\ell^{j+1} = z_\ell^j$;
- pour $\ell = k$, on a $z_k^{j+1} = y_{j+1}$;
- pour $\ell > k$, on a $z_\ell^{j+1} = z_{\ell-1}^j$.

On compare maintenant les sommes supérieures avec $P \cup \{y_0, \dots, y_j\}$ et $P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}$. On a

$$\begin{aligned} S(f, P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) & - S(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) = \sum_{\ell=1}^{n+j} M_\ell^j (z_\ell^j - z_{\ell-1}^j) - \sum_{\ell=1}^{n+j+1} M_\ell^{j+1} (z_\ell^{j+1} - z_{\ell-1}^{j+1}) \\ & = \sum_{\ell=k}^{n+j} M_\ell^j (z_\ell^j - z_{\ell-1}^j) - \sum_{\ell=k}^{n+j+1} M_\ell^{j+1} (z_\ell^{j+1} - z_{\ell-1}^{j+1}) \\ & = M_k^j (z_k^j - z_{k-1}^j) - M_k^{j+1} (y_{j+1} - z_{k-1}^j) - M_{k+1}^{j+1} (z_k^j - y_{j+1}) \\ & \leq M (z_k^j - z_{k-1}^j) \\ & \leq M\delta. \end{aligned}$$

De même, on a

$$I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) - I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) \leq m\delta.$$

En combinant les sommes inférieures et supérieures et prenant la somme de 1 à d , on trouve

$$\begin{aligned} & S(f, P) - I(f, P) - S(f, P \cup \{y_0\}) + I(f, P \cup \{y_0\}) \\ & + \sum_{j=0}^{d-1} \left[S(f, P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) - I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_j\}) \right. \\ & \quad \left. - S(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) + I(f, P \cup \{y_0, \dots, y_{j+1}\}) \right] \\ & = S(f, P) - I(f, P) - (S(f, P \cup P_\varepsilon) - I(f, P \cup P_\varepsilon)) \\ & \leq 2M\delta d. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} S(f, P) - I(f, P) & \leq 2Md\delta + (S(f, P \cup P_\varepsilon) - I(f, P \cup P_\varepsilon)) \\ & \leq 2Md\delta + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si on prend $\delta = \frac{\varepsilon}{2dM}$, alors on obtient

$$S(f, P) - I(f, P) \leq \varepsilon$$

tel que voulu.

On notera bien que le δ choisi dépend de ε et de d , mais pas de P . En effet, d est déterminé en fonction ε et indépendamment de P .

□

Démonstration du théorème. On suppose que f est intégrable et on montre qu'elle satisfait le critère de Riemann.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ dont l'existence provient du lemme 1.7.3. Pour toute partition P avec $\|P\| < \delta$ et pour tout test ξ , on a

$$\begin{aligned} -\varepsilon & \leq I(f, P) - S(f, P) && \text{(par le lemme 1.7.3)} \\ & \leq R(f, P, \xi) - S(f, P) && \text{(par (1))} \\ & \leq R(f, P, \xi) - \int_a^b f && \text{(car } S(f, P) \geq \int_a^b f) \\ & \leq S(f, P) - \int_a^b f && \text{(par (1))} \\ & \leq S(f, P) - I(f, P) && \text{(car } I(f, P) \leq \int_a^b f) \\ & \leq \varepsilon, && \text{(par le lemme 1.7.3)} \end{aligned}$$

d'où $\left| R(f, P, \xi) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon$. On conclut que f satisfait au critère de Riemann.

Pour la réciproque, on suppose que f satisfait au critère de Riemann et on montre que

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit S et δ qui satisfont au critère de Riemann. D'abord, on a que pour toute partition P avec $\|P\| < \delta$ et pour tout test ξ ,

$$R(f, P, \xi) \leq S + \varepsilon.$$

Puisque l'inégalité tient pour tout test $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, elle reste vraie lorsque $f(\xi_j) \rightarrow \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f$. Il suit que $S(f, P) \leq S + \varepsilon$. De même, on a $S - \varepsilon \leq I(f, P)$.

Soit ensuite (P_n) une suite de partitions telle que

$$I(f, P_n) \rightarrow \int_a^b f \quad \text{et} \quad S(f, P_n) \rightarrow \overline{\int_a^b f}.$$

On a

$$S - \varepsilon \leq I(f, P \cup P_n) \leq S(f, P \cup P_n) \leq S + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on conclut que $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = S$.

□

Chapitre 2

Convergence uniforme

2.1. Convergence simple

Définition 1. Soit X un ensemble, soit $(f_n)_{n \geq 1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f sur X si, pour chaque $x \in X$, la suite de nombres $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers $f(x) \in \mathbb{R}$.

On écrit également $f_n \rightarrow f$ simplement sur X lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exemple 2.1.1. $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{n^2 + x^2}$.

On a

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \rightarrow x^2 \quad \text{lorsque } x \rightarrow \infty.$$

Conclusion : $f_n \rightarrow f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où $f(x) = x^2$.

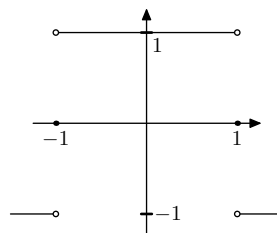
Exemple 2.1.2. $f_n(x) = \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

Il y a trois possibilités :

1. si $|x| < 1$, alors $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} \rightarrow \frac{1-0}{1+0} = 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$;
2. si $|x| > 1$, alors $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{\frac{1}{x^{2n}} - 1}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} \rightarrow \frac{0-1}{0+1} = -1$ lorsque $n \rightarrow \infty$;
3. si $|x| = 1$, alors $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = 0$ pour tout n .

Conclusion : $f_n \rightarrow f$ simplement sur $\mathbb{R}$, où

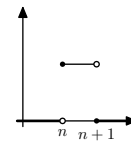
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| = 1, \\ -1, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$



Exemple 2.1.3. $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [n, n+1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

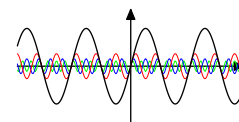
On voit que $f_n(x) = 0$ si $n > x$, donc $f_n \rightarrow 0$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Ici, $f_n \rightarrow 0$ sur $\mathbb{R}$, mais $\int_0^\infty f_n \not\rightarrow \int_0^\infty 0$, car $\int_0^\infty f_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Exemple 2.1.4. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

On note que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f_n \rightarrow 0$ simplement sur $\mathbb{R}$.



Les exemples précédents montrent que bien qu'elle semble naturelle, la convergence simple ne respecte ni la continuité, ni l'intégration, ni la dérivation. Il nous faut un mode de convergence plus fort : la *convergence uniforme*.

2.2. Convergence uniforme

Définition 1. Soit X un ensemble. Soit $(f_n)_{n \geq 1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction. On dit que f_n converge vers f uniformément sur X si

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarque. Si $f_n \rightarrow f$ uniformément sur X , alors $f_n \rightarrow f$ simplement sur X . Ainsi, pour déterminer si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément :

1. on identifie la limite simple f , si elle existe;
2. on tente de montrer que $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exemple 2.2.1. $f_n(x) = xe^{-nx}$ sur $[0, \infty)$.

On note que $f_n \rightarrow 0$ simplement sur $[0, \infty)$. On veut donc montrer que

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |xe^{-nx}| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

On a

$$f'_n(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = (1 - nx)e^{-nx} \begin{cases} > 0, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ < 0, & \text{si } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Donc, il s'ensuit que

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Conclusion : $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, \infty)$.

Exemple 2.2.2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $[0, 1]$

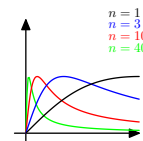
On voit que $f_n \rightarrow 0$ simplement sur $[0, 1]$. (En effet, si $x > 0$, alors $f_n(x) \leq \frac{nx}{n^2x} = \frac{1}{nx}$ et si $x = 0$, alors $f(0) = 0$ pour tout n .)

On trouve que le supremum est atteint en $x = \frac{1}{n}$ (à l'aide du calcul différentiel). Donc

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Conclusion : $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ (ni vers 0, ni vers aucune autre limite).



Exemple 2.2.3. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, \frac{9}{10})$.

On voit que $f_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour tout $x \in (0, \frac{9}{10})$. De plus, on a

$$\sup_{x \in (0, \frac{9}{10})} |f_n(x)| = \left(\frac{9}{10}\right)^n \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $x^n \rightarrow 0$ uniformément sur $(0, \frac{9}{10})$.

Exemple 2.2.4. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, 1)$.

Encore une fois, on voit que $f_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour tout $x \in (0, 1)$. Par contre, on a

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x)| = 1^n \not\rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, f_n ne converge pas uniformément sur $(0, 1)$.

Morale : le domaine est important!

2.3. Convergence uniforme et continuité

Théorème 1. On suppose que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur un intervalle I . Soit $a \in I$. Si chaque f_n est continue en a , alors f est continue en a .

Corollaire 2. Si $f_n \rightarrow f$ uniformément sur I et si chaque f_n est continue sur I , alors f est continue sur I aussi.

Démonstration du théorème. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f_n \rightarrow f$ uniformément sur I , il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particulier,

$$\sup_{x \in I} |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (*)$$

Comme f_N est continue en a , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta$, on a

$$|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$$

Ainsi, pour tout $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \underset{\text{par } (*)}{\frac{\varepsilon}{3}} + \underset{\text{par } (**)}{\frac{\varepsilon}{3}} + \underset{\text{par } (*)}{\frac{\varepsilon}{3}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où f est continue en a .

□

Exemple 2.3.1. $f_n(x) = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$.

On a déjà vu que $f_n \rightarrow f$ simplement, où

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| = 1, \\ -1, & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

qui a des discontinuités en $x = \pm 1$. Donc $f_n \not\rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.2. $f_n(x) = x^n$ sur $(0, 1)$.

On a vu que $f_n \rightarrow 0$ simplement, mais pas uniformément sur $(0, 1)$. Bien que la convergence ne soit pas uniforme, la limite simple est continue. Cela montre que la convergence uniforme est *suffisante* pour préserver la continuité, mais pas nécessaire.

2.4. Convergence uniforme et intégration

Théorème 1. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ et on suppose de plus que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[a, b]$. Alors

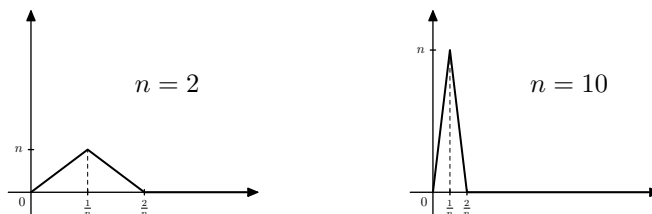
$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad (n \rightarrow \infty).$$

Démonstration. D'après le théorème de la section 2.3, la fonction f est continue sur $[a, b]$, donc intégrable. On a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| &= \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n - f| \\ &\leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Exemple 2.4.1. Soit f_n la fonction de la figure.



On a que $f_n \rightarrow 0$ simplement sur $[0, 2]$, mais $\int_0^2 f_n \not\rightarrow \int_0^2 f$, puisque $\int_0^2 f_n = 1$ pour tout n et $\int_0^2 0 = 0$.

Conclusion : la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f .

Exemple 2.4.2. Soit f_n la fonction de la figure



On a que $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, \infty)$ (en effet $\sup_{[0, \infty)} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$).

Par contre, on voit que $\int_0^\infty f_n \not\rightarrow \int_0^\infty 0$, puisque $\int_0^\infty f_n = 1$ pour tout n et $\int_0^\infty 0 = 0$.

Le théorème de n'applique pas, puisque $[0, \infty)$ n'est pas borné.

Théorème 2. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ des fonctions intégrables sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ et on suppose de plus que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[a, b]$. Alors f est intégrable et

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f \quad (n \rightarrow \infty).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\sup_{[a, b]} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Soit $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ une partition de $[a, b]$. On pose

$$\begin{aligned} M_j^{(n)} &= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_n, & M_j &= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \\ m_j^{(n)} &= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_n, & m_j &= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f. \end{aligned}$$

Par la convergence uniforme, on a, pour tout x , que $f_n - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f < f_n + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, donc $M_j^{(n)} - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < M_j < M_j^{(n)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et de même pour m_j . Il suit que

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b f} &\leq S(f, P) = \sum_{j=1}^m M_j(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(M_j^{(n)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m M_j^{(n)}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_j - x_{j-1}) \\ &= S(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \\ &= S(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour toute partition P , donc il suit que $\overline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f_n} + \frac{\varepsilon}{2}$. De la même façon, on trouve $\overline{\int_a^b f} \geq \overline{\int_a^b f_n} - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\underline{\int_a^b f} \geq \underline{\int_a^b f_n} - \frac{\varepsilon}{2}$. En combinant, on trouve

$$\overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f_n} - \underline{\int_a^b f_n} + \varepsilon = \varepsilon,$$

car $\underline{\int_a^b f_n} = \overline{\int_a^b f_n}$ puisque f_n est intégrable. Comme ε est arbitraire, on conclut que f est intégrable.

Enfin, par ce qui précède, on a

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b f} - \overline{\int_a^b f_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

et puisque $\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}$ et $\overline{\int_a^b f_n} = \underline{\int_a^b f_n}$, on déduit que $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ lorsque $n \rightarrow \infty$. □

2.5. Convergence uniforme et dérivation

Attention! Même si $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}$, on n'obtient pas $f'_n \rightarrow f'$ (même simplement).

Exemple 2.5.1. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

On a que $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, mais $f'_n(x) = \cos(nx)$, donc $f'(0) = 1 \neq 0$.

Conclusion : $f'_n \not\rightarrow 0$ en $x = 0$.

Théorème 1. Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle I . On suppose que chaque f_n est dérivable et que f'_n est continue. On suppose, de plus, que

(i) $f_n \rightarrow f$ simplement sur I ;

(ii) $f'_n \rightarrow g$ uniformément sur I .

Alors f est dérivable sur I et $f' = g$.

Démonstration. On fixe $a \in I$. Par le théorème fondamental du calcul, version 2, pour chaque $x \in I$, on a

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n. \quad (*)$$

D'une part, par l'hypothèse (i), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - f_n(a) = f(x) - f(a)$$

pour chaque $x \in I$.

D'autre part, par l'hypothèse (ii) et le théorème de la section 2.4, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n = \int_a^x g.$$

Donc, en laissant $n \rightarrow \infty$ dans (*), on obtient

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g.$$

Par le théorème fondamental du calcul, version 1, f est dérivable et

$$f'(x) = g(x)$$

pour tout $x \in I$.

□

2.6. Convergence uniforme des séries

Tout comme pour les séries de nombres, la convergence d'une série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ est définie en termes de la convergence de la suite des sommes partielles

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Définition 1. Soit X un ensemble et soit $(u_k)_{k \geq 0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

On dit que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge simplement* sur X si la suite (f_n) converge simplement sur X . On

dit que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *converge uniformément* sur X si la suite (f_n) converge uniformément sur X .

Exemple 2.6.1. 1. Soit la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Montrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Solution. D'abord, on calcule la limite simple. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\sum_{n=1}^N \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}.$$

Si on laisse $N \rightarrow \infty$, on voit que $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge absolument, ainsi elle converge. La limite simple est donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

Montrons maintenant que la convergence est uniforme. Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin(nx)}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| &= \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

En prenant le supremum pour les $x \in \mathbb{R}$ de chaque côté, on obtient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin(nx)}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Si on laisse $N \rightarrow \infty$, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin(nx)}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2. Soit la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)$. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Solution. Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère le point $x = \frac{\pi}{N} \in [0, 2\pi]$. On écrit

$$\sum_{n=0}^N \sin\left(n \frac{\pi}{N}\right) = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^N \sin\left(n \frac{\pi}{N}\right) \right). \quad (*)$$

Le terme entre parenthèse est une somme de Riemann, on a donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^N \sin\left(n \frac{\pi}{N}\right) = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$$

Soit $\varepsilon = 1$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq M$, on a

$$\left| \frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^N \sin\left(n \frac{\pi}{N}\right) - 2 \right| < 1,$$

d'où on tire $1 < \sum_{n=0}^N \sin\left(n\frac{\pi}{N}\right)$. Si on remplace dans (*), pour $N \geq M$, on trouve

$$\sum_{n=0}^N \sin\left(n\frac{\pi}{N}\right) = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^N \sin\left(n\frac{\pi}{N}\right) \right) > \frac{N}{\pi}.$$

Il suit que

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} \sum_{n=0}^N \sin\left(n\frac{\pi}{N}\right) > \frac{N}{\pi}$$

pour tout $N \geq M$. Ainsi, si on laisse $N \rightarrow \infty$, le côté gauche tend vers $+\infty$. Il est donc impossible que $\sum \sin(nx)$ converge uniformément.

[En effet, si $\sum \sin(nx) \rightarrow f(x)$ uniformément sur $[0, 2\pi]$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors f est continue sur $[0, 2\pi]$ et donc bornée. On a alors

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{n=0}^N \sin(nx) \right| \leq \sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{n=0}^N \sin(nx) - f(x) \right| + \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$$

où le premier terme du côté droit est bornée car $\sum \sin(nx) \rightarrow f(x)$ uniformément et le deuxième terme est bornée car f est bornée.]

Les théorèmes déjà vus pour les suites se traduisent facilement en des théorèmes correspondants pour les séries.

Théorème de continuité 2. Si $(u_k)_{k \geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle I et si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur I , alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur I .

Théorème d'intégration 3. Si $(u_k)_{k \geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle borné $[a, b]$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b u_k \right).$$

Démonstration. On pose $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a

$$\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k.$$

Par hypothèse, $f_n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ uniformément sur $[a, b]$, donc par le théorème de la section 2.4, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

□

Théorème de dérivation 4. Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I avec u'_k continue pour chaque k . On suppose, de plus, que

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge simplement sur I , et

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k$ converge uniformément sur I .

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est dérivable sur I et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k)'.$$

Démonstration. On pose $f_n := \sum_{k=0}^n u_k$. On sait que f_n est dérivable et que

$$f'_n = \sum_{k=0}^n (u_k)'$$

Par l'hypothèse (i), on a que

$$f_n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (n \rightarrow \infty)$$

sur I et

$$f'_n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \quad (n \rightarrow \infty)$$

uniformément sur I .

Selon le théorème de la section 2.5, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est dérivable sur I et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k.$$

□

En principe, la théorie pour les séries est partielle à celle des suites. Cependant, en pratique, il y a une différence importante. Il est souvent difficile, voire impossible, d'identifier explicitement la limite $f(x)$ d'une série, ce qui complique le calcul de $\sup |f(x) - f_n(x)|$ utilisé pour déterminer la convergence uniforme de la série. Il nous faut donc un critère qui nous assure de la convergence uniforme d'une série de fonctions, sans avoir à identifier explicitement la limite. Voici un tel critère.

Le critère de Weierstrass. Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonction sur X . On suppose qu'il existe des nombres $(M_k)_{k \geq 0}$ tels que

(i) $|u_k(x)| \leq M_k$ pour tout $k \geq 0$ et $x \in X$, et

(ii) la série $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge.

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur X .

Exemple 2.6.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$.

On note que

$$\left| \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

et que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

D'après le critère de Weierstrass, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.6.3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(1000^k x)}{10^k}$.

Exactement le même raisonnement montre que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc elle donne une fonction continue. (Par contre, on peut montrer que cette fonction n'est dérivable nulle part.)

Démonstration. On remarque d'abord que la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge simplement sur X . En effet, pour chaque $x \in X$, on a $|u_k(x)| \leq M_k$ et $\sum_0^{\infty} M_k$ converge, donc par le test de comparaison pour les séries, $\sum_0^{\infty} |u_k(x)|$ converge.

Le problème est de montrer que la convergence est uniforme sur X . Pour le faire, on considère les sommes partielles

$$f_n := \sum_{k=0}^n u_k$$

et on pose aussi

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

On sait que $f_n \rightarrow f$ simplement sur X et on veut montrer que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur X .

On prend n, m entiers avec $m > n$. Pour chaque $x \in X$, on a

$$f_m(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^m u_k(x),$$

donc

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k.$$

On laisse $m \rightarrow \infty$ pour obtenir

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Comme cet estimé est valable pour chaque $x \in X$ et le membre de droite ne dépend pas de x , il suit que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Or on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^{\infty} M_k - \sum_{k=0}^n M_k \longrightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. On conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Conclusion : $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformément sur X .

□

Remarque. Le critère de Weierstrass n'est pas une condition nécessaire, comme le montre cet exemple.

Exemple 2.6.4. Soit la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Le critère de Weierstrass est difficile à appliquer dans ce cas, car la série n'est pas absolument convergente. Pourtant, elle converge uniformément sur $[0, \infty)$.

Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x+k}$ la suite des sommes partielles. On s'intéresse à calculer

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f(x) - f_{n-1}(x)|.$$

On a

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| = \left| (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{x+k} \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+n+k} \right|.$$

Ainsi, les deux premiers termes sont

$$\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Les $2k$ -ième et $2k+1$ -ième termes sont

$$\frac{1}{x+n+2k} - \frac{1}{x+n+2k+1} = \frac{1}{(x+n+2k)(x+n+2k+1)} \leq \frac{1}{(n+2k)^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2}.$$

On obtient donc

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+n+k} \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n+2k} - \frac{1}{x+n+2k+1} \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Puisque c'est une série convergente, on voit qu'elle tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Cela montre que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[0, \infty)$.

2.7. Convergence uniforme et intégrale impropre

Théorème 1. Soit $a < b \leq \infty$ et (f_n) une suite de fonctions de $[a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables sur tout intervalle $[a, c] \subseteq [a, b)$. On suppose que

1. $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[a, b)$,
2. les intégrales impropres $\int_a^b |f_n|$ convergent et
2. $\int_a^b \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$ converge,

alors $\int_a^b |f|$ converge et $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$.

Démonstration. Comme $|f_n| \leq \sup_n |f_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suit que $|f| \leq \sup_n |f_n|$ et donc $\int_a^b |f|$ converge par le test de comparaison.

Ensuite, comme $\int_a^b \sup_n |f_n|$ et $\int_a^b |f|$ convergent, il existe $M \in (a, b)$ tel que

$$\int_M^b \sup_n |f_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \int_M^b |f| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, comme $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[a, M]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\int_a^M |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| &\leq \int_a^b |f_n - f| \\ &= \int_a^M |f_n - f| + \int_M^b |f_n - f| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \int_M^b \sup_n |f_n| + \int_M^b |f| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

où les coefficients a_k sont des nombres réels (complexes). On verra que ces séries possèdent des propriétés spéciales qui les rendent presque aussi faciles à manipuler que les polynômes.

3.1. Rayon de convergence

Théorème 1. Soit $\sum_0^{\infty} a_k x^k$ une série entière. Alors il existe R avec $0 \leq R \leq \infty$ tel que

- $|x| < R \Rightarrow \sum_0^{\infty} a_k x^k$ et $\sum_0^{\infty} |a_k x^k|$ convergent;
- $|x| > R \Rightarrow \sum_0^{\infty} a_k x^k$ et $\sum_0^{\infty} |a_k x^k|$ divergent.

Remarques. 1. Le nombre R s'appelle le rayon de convergence.

2. Le théorème ne dit rien sur ce qui se passe lorsque $|x| = R$. Cela dépend de la série en question.

3. Le rayon de convergence est unique, puisque si $R < R_1$ était un autre rayon de convergence, pour les x tels que $R < |x| < R_1$, la série entière devrait à la fois converger et diverger, ce qui est impossible.

Démonstration. On pose

$$C = \left\{ x : \sum_0^{\infty} a_k x^k \text{ converge} \right\}.$$

Cet ensemble est non vide, car $0 \in C$. On pose ensuite

$$R = \sup_{x \in C} |x|$$

($R = \infty$ si C est non borné). Par la définition de R , si $|x| > R$, alors $x \notin C$, donc $\sum_0^{\infty} a_k x^k$

diverge et ainsi $\sum_0^{\infty} |a_k x^k|$ diverge aussi.

Il reste à montrer que si $|x| < R$, alors $\sum_0^\infty |a_k x^k|$ converge et donc $\sum_0^\infty a_k x^k$ converge aussi. On prend x avec $|x| < R$. Par la définition de R , il existe $y \in C$ tel que $|x| < |y|$. Comme $y \in C$, la série $\sum_0^\infty a_k y^k$ converge. Il suit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k y^k = 0$$

et donc que la suite $(a_k y^k)$ est bornée, disons $|a_k y^k| \leq M$ pour tout $k \geq 0$. Alors on a

$$|a_k x^k| = |a_k y^k| \left| \frac{x}{y} \right|^k \leq M \left| \frac{x}{y} \right|^k$$

et

$$\sum_{k=0}^\infty M \left| \frac{x}{y} \right|^k$$

converge puisque c'est une progression géométrique de rapport $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$.

Par le test de comparaison, il suit que $\sum_0^\infty |a_k x^k|$ converge, comme voulu.

□

Exemple 3.1.1. $\sum_{k=0}^\infty x^k$.

Elle converge si $|x| < 1$ et elle diverge si $|x| \geq 1$ (puisque $x^k \not\rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$). Donc $R = 1$.

Exemple 3.1.2. $\sum_{k=0}^\infty kx^k$.

On applique le test de d'Alembert :

$$\frac{|(k+1)x^{k+1}|}{|kx^k|} = \left| \frac{k+1}{k} \right| |x| \rightarrow |x| \quad (k \rightarrow \infty).$$

Donc, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

Conclusion : $R = 1$.

Exemple 3.1.3. $\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$.

On applique d'Alembert :

$$\frac{\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{x^k}{k!} \right|} = \frac{|x|}{k} \rightarrow 0$$

lorsque $k \rightarrow \infty$. Donc la série converge pour tout x , c'est-à-dire que $R = \infty$.

Exemple 3.1.4. $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$.

La série diverge si $|x| \neq 0$ et elle converge si $x = 0$, donc $R = 0$.

3.2. Séries entières et convergence uniforme

Théorème 1. Soit $\sum_0^k a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour chaque $S < R$, la série $\sum_0^k a_k x^k$ converge uniformément sur $[-S, S]$.

Remarque. En général, la convergence n'est pas uniforme sur $(-R, R)$. Par exemple, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1$$

et on a vu que $R = 1$. Par contre, on voit que

$$\sup_{x \in (-1,1)} \left| \sum_{k=0}^n x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \infty$$

pour tout n .

Démonstration. On fixe $S < R$. Pour tout $x \in [-S, S]$, on a

$$|a_k x^k| \leq |a_k| S^k$$

et $\sum_0^{\infty} |a_k| S^k$ converge (puisque $S < R$).

Par le critère de Weierstrass, appliqué avec $M_k = |a_k| S^k$, on conclut que $\sum_0^{\infty} a_k x^k$ converge uniformément sur $x \in [-S, S]$. □

Corollaire 2. La fonction $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est continue sur $(-R, R)$.

Démonstration. Pour tout $S < R$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge uniformément sur $[-S, S]$, donc f est continue sur $[-S, S]$. Comme c'est vrai pour chaque $S < R$, il s'ensuit que f est continue sur $(-R, R)$. □

Corollaire 3. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout a, b tel que $-R < a < b < R$, on a

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 2.6.3. □

Exemple 3.2.1. On pose $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. On montre que L se développe en série entière autour de $x = 1$. Si $|x| < 1$, on a

$$\begin{aligned} L(1+x) &= \int_1^{1+x} \frac{dt}{t} = \int_0^x \frac{dt}{1+t} \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \quad (\text{car } |t| \leq |x| < 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt \quad (\text{corollaire 3.2.3}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour $|x-1| < 1$

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}.$$

De plus, on voit que pour $x = 0$, la série diverge, donc le rayon de convergence est exactement 1. □

3.3. Dérivation terme à terme des séries entières

Théorème 1. Soit $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est dérivable sur $(-R, R)$ et

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{pour } x \in (-R, R).$$

Lemme 2. $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$ converge pour tout x avec $|x| < R$ ($R =$ le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$).

Démonstration. On fixe x avec $|x| < R$. On choisit $\delta > 0$ tel que $|x| + \delta < R$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(|x| + \delta)^k$ converge. On aussi

$$\begin{aligned} (|x| + \delta)^k &= |x|^k + k|x|^{k-1}\delta + \dots + \delta^k \\ &\geq k|x|^{k-1}\delta \quad (\forall k \geq 0). \end{aligned}$$

Donc, par le test de comparaison, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|k|x|^{k-1}\delta$$

converge. On voit que $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k||x|^{k-1}$ converge et ainsi $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^{k-1}$ converge. □

Démonstration du théorème. On pose

$$u_k(x) = a_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}.$$

Par le lemme, le rayon de convergence de la série de g est au moins R . Donc, par le théorème de la section 3.2, pour chaque $S < R$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} u_k &\text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [-S, S] \text{ et} \\ \sum_{k=0}^{\infty} u'_k &\text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } [-S, S]. \end{aligned}$$

Il suit que f est dérivable sur $[-S, S]$ et que $f' = g$ sur $[-S, S]$.

Comme c'est vrai pour chaque $S < R$, en fait f dérivable sur $(-R, R)$ et $f' = g$ sur $(-R, R)$. □

Exemple 3.3.1. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$).

D'après le théorème, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On peut réappliquer le théorème à la série entière $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.

Corollaire 3. Une série entière $f(x) = \sum_0^{\infty} a_k x^k$ de rayon de convergence $R > 0$ est infiniment dérivable et pour chaque $n \geq 0$, on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) a_k x^{k-n} \quad \text{pour } x \in (-R, R). \quad (*)$$

Corollaire 4. Sous les mêmes hypothèses,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration. En posant $x = 0$ dans $(*)$, on obtient $f^{(n)}(0) = n! a_n$. □

Corollaire 5. Si $\sum_0^{\infty} a_k x^k = \sum_0^{\infty} b_k x^k$ pour $x \in (-\delta, \delta)$, où $\delta > 0$, alors $a_k = b_k$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. On pose $f(x) = \sum_0^{\infty} a_k x^k$ et $g(x) = \sum_0^{\infty} b_k x^k$. Selon l'hypothèse, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in (-\delta, \delta)$.

Il s'ensuit que $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ pour tout $x \in (-\delta, \delta)$ et pour tout $n \geq 0$. En particulier, on a $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$. Par le corollaire 3.3.4, on déduit que $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$. □

3.4. Fonctions analytiques

Définition 1. Soit I un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est (réelle) analytique si pour tout $a \in I$, il existe $R > 0$ et (a_n) tels que

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge absolument pour tout $|a-x| < R$ et de plus si $|a-x| < R$, alors $f(x) = g(x)$. *****

Exemple 3.4.1. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est analytique sur $(1, \infty)$.

Soit $a \in (1, \infty)$. On a

$$\frac{1}{1-a-(x-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-a}{1-a}}.$$

Ensuite, on a

$$\left| \frac{x-a}{1-a} \right| < 1 \iff |x-a| < a-1.$$

On pose $R = a - 1$. Pour $|x-a| < R$, (c'est-à-dire pour $x \in (1, 2a-1)$), on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-a}{1-a}} \\ &= \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a}{1-a} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{(1-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Les fonctions analytiques généralisent l'idée d'une série entière.

Théorème 2. Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est analytique sur $(-R, R)$.

Démonstration. Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $a \in (-R, R)$ et $0 < r < R - |a|$. Soit $x \in (-R, R)$ tel que $|x-a| < r - |a|$. Il suit que $|x| < |x-a| + |a| < r < R$, donc $\sum a_n x^n$ converge absolument.

On a

$$x^n = (x-a+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k}.$$

Si on pouvait échanger l'ordre des sommations, on trouverait

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} \binom{m+k}{k} (x-a)^k a^m \end{aligned} \quad (*)$$

où on a posé $m := n - k$. Pour alléger un peu, on pose $u_{k,m}(x) := a_{m+k} \binom{m+k}{k} (x-a)^k a^m$. Soit $J \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un sous-ensemble fini. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \subseteq B((0,0), N)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{(k,m) \in J} |u_{k,m}(x)| &\leq \sum_{0 \leq m+k \leq N} |u_{k,m}(x)| \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{m+k=n} |u_{k,m}(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^N \sum_{m+k=n} \left| a_{m+k} \binom{m+k}{k} (x-a)^k a^m \right| \\
&= \sum_{n=0}^N |a_{m+k}| \sum_{m+k=n} \left| \binom{m+k}{k} (x-a)^k a^m \right| \\
&= \sum_{n=0}^N |a_n| (|x-a| + |a|)^n \\
&\leq \sum_{n=0}^N |a_n| r^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{k,m}(x)$ converge absolument, donc par le théorème de Fubini pour les séries (`cor:Fubini serie`), on peut échanger l'ordre des séries pour obtenir

$$\sum_{(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_{k,m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{k,m}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,m}(x).$$

L'équation (*) est donc vérifiée, ce qui permet de conclure que pour tout x tel que $|x-a| < r-a$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} a^m \binom{m+k}{k} \right) (x-a)^k. \quad (**)$$

Comme $r < R - |a|$ était arbitraire, on conclut que le rayon de convergence de (**) est exactement $R - |a|$. □



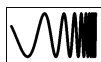
Les fonctions analytiques possèdent plusieurs propriétés importantes. On ne les montrera pas dans le cours d'analyse 2, car elles seront vues en analyse complexe de toute façon (et les démonstrations seront beaucoup simples et élégantes). En voici tout de même une liste non exhaustive :

1. la somme finie de fonctions analytiques est analytique;
2. le produit fini de fonctions analytiques est analytique;
3. le quotient d'une fonction analytique par une fonction analytique non nulle est analytique;
4. la composée de deux fonctions analytiques est analytique là où la composition est possible.

Ainsi, la plupart des fonctions qu'on est habitué de voir sont analytiques.

Par exemple, la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est analytique sur $(0, \infty)$, puisqu'on a $f(x) = \sqrt{x} = e^{\frac{1}{2} \log x}$, qui est la composition de deux fonctions analytiques sur $(0, \infty)$.

Par contre, il ne faut pas croire que toutes les fonctions qui ont « une jolie expression » sont nécessairement analytiques.



Exemple 3. La fonction $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$ n'est pas analytique. En effet, on a $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (exercice). Si f était analytique, cela impliquerait que $f(x) = 0$ pour tout x , ce qui est évidemment faux.



Une fonction analytique est infiniment dérivable, mais comment dire si une fonction infiniment dérivable est analytique?

En fait, elles sont caractérisées par le théorème suivant.

Théorème 4. Soit f une fonction infiniment dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Elle est analytique sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, il existe $J \subseteq I$ et $C, R > 0$ tels que $a \in J$ et pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \frac{n!}{R^n}.$$

Chapitre 4

Fonctions transcendentes

4.1. exp

Définition 1. $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Série entière, $R = \infty$)

Propriétés de exp.

0. $\exp(0) = 1$

1. exp est dérivable et $\exp'(x) = \exp(x)$
[Dériver terme à terme en utilisant le théorème théorème 3.3.1.]

2. $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

Dem. On pose $f(x) = \exp(x) \exp(a + b - x)$. On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x)(-1) \exp'(a + b - x) + \exp'(x) \exp(a + b - x) \\ &= -\exp(x) \exp(a + b - x) + \exp(x) \exp(a + b - x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc f est constante. En particulier

$$\begin{aligned} f(0) &= f(a) \\ \underbrace{\exp(0)}_{=1} \exp(a + b) &= \exp(a) \exp(b). \quad \square \end{aligned}$$

3. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

[On prend $a = x$ et $b = -x$ au 2.]

4. $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

[Si $x \geq 0$, cela découle de la définition. Si $x < 0$, alors on utilise la propriété 3.]

5. exp est strictement croissante.

[$\exp'(x) = \exp(x) > 0$]

6. Pour chaque $k \geq 0$,

$$\frac{\exp(x)}{x^k} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \rightarrow \infty.$$

[En effet, si $x \geq 0$, alors

$$\exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

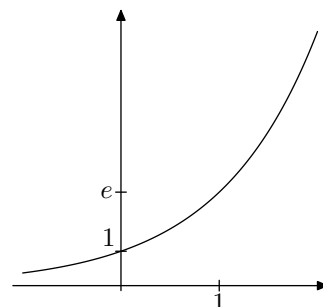
donc $\frac{\exp(x)}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)!} \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$.]

7. $\exp(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ [cas particulier de 6]

$$\exp(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow -\infty \left[\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \right]$$

Définition 2. $e := \exp(1)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \\ &\approx 2,7128. \end{aligned}$$



Graphes de exp

8. $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

[Dém. La démonstration se fait en deux étapes.

1^{ère} étape : montrer que $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty); x \mapsto e^x$ est continue. On montre d'abord que f est strictement croissante. Si $p < q$ sont rationnels, on sait déjà que $f(p) < f(q)$. Soit $x < y$. Par la densité des rationnels, il existe $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $x < p < q < y$. Par définition de e^x , on a $e^x \leq e^p$. Par définition de e^y , on a $e^q \leq e^y$. Il suit que $f(x) \leq f(p) < f(q) \leq f(y)$, d'où f est strictement croissante.

On montre maintenant que f est surjective. Soit $y \in (0, \infty)$. On pose $E_y = \{z \in \mathbb{R} \mid e^z < y\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{1 + (e-1)n} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-N} < y$, d'où E_y est non vide. Ensuite, on a $e^n \geq 1 + (e-1)n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $e^M > y$. Si $z \in E_y$, alors $e^z < y \leq e^M$, donc $z < M$. Ainsi, E_y est majoré. Par l'axiome de complétude, $x := \sup E_y$ existe. On montre que $f(x) = y$.

Soit $p \in \mathbb{Q}$ tel que $p < x$. Puisque x est le supremum de E_y , il existe $q \in E_y$ tel que $p < q < x$. On a donc $e^p < e^q < y$, d'où $p \in E_y$. Ainsi, y est un majorant de l'ensemble $\{e^p \mid p \in \mathbb{Q} \text{ et } p < x\}$. Puisque e^x est le supremum de cet ensemble, on a $e^x \leq y$.

Enfin, on suppose par l'absurde que $e^x < y$. On pose $\varepsilon = \frac{y}{e^x} > 1$. Puisque $\sqrt[n]{e} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt[n]{e} < \varepsilon$. Par densité des rationnels dans les réels, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r < x < r + \frac{1}{K}$. On a

$$e^r < e^x < e^{r+\frac{1}{K}} = e^r e^{\frac{1}{K}} < e^r \varepsilon = y.$$

Ainsi, $r + \frac{1}{K} \in E_y$, mais cela est une contradiction, car x est un majorant de E_y et $r + \frac{1}{K} > x$. On conclut que $e^x = y$, d'où f est surjective.

Une fonction strictement croissante et surjective est nécessairement continue (analyse 1), d'où f est continue.

2^e étape : montrer que $\exp(q) = e^q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, alors

$$\begin{aligned}\exp(n) &= \underbrace{\exp(1) \cdot \dots \cdot \exp(1)}_{n \text{ fois}} \\ &= e \cdot \dots \cdot e = e^n.\end{aligned}$$

L'énoncé est vrai pour $-n$ également, puisque $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)}$.

Si q est rationnel, disons $q = \frac{a}{b}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, alors

$$\begin{aligned}\left(\exp\left(\frac{a}{b}\right)\right)^b &= \exp(a/b) \cdot \dots \cdot \exp(a/b) \quad (b \text{ fois}) \\ &= \exp(a/b + \dots + a/b) \quad (b \text{ fois}) \\ &= \exp(a) \\ &= e^a.\end{aligned}$$

Ceci donne bien $\exp(a/b) = e^{\frac{a}{b}}$.

Enfin, puisque $\exp$ et f sont continues sur $\mathbb{R}$ et que $\exp(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on conclut que $\exp(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme voulu. $\square$

9. Si f est une fonction dérivable et $f'(x) = f(x)$, alors $f(x) = C \exp(x)$, où C est une constante.

[*Dém.* On pose $g(x) := f(x) \exp(-x)$. Alors g est dérivable et

$$\begin{aligned}g'(x) &= f(x)(-1) \exp(-x) + f'(x) \exp(-x) \\ &= -f(x) \exp(-x) + f(x) \exp(-x) \\ &= 0,\end{aligned}$$

donc g est constante, disons $g(x) = C$. Il suit que $C = f(x) \exp(-x)$, c'est-à-dire $f(x) = C \exp(x)$.]

4.2. log

Définition 1. $\log x := \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (x > 0)$

Propriétés de log.

0. $\log(1) = 0$

1. $\log$ est dérivable et $\log'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

[Conséquence immédiate du théorème fondamental du calcul 1.]

2. $\log(ab) = \log a + \log b$ pour tout $a, b > 0$.

$$\begin{aligned} \left[\log(ab) &= \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt \right. \\ &= \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt & s = \frac{t}{a} \\ &= \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{s} ds & ds = \frac{dt}{a} \\ &= \log a + \log b. & \square \end{aligned}$$

3. $\exp(\log x) = x$ pour tout $x > 0$

$$\log(\exp(x)) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donc $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ et $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sont mutuellement inverses.

[Dém. On pose $f(x) = \frac{\exp(\log x)}{x}$. On a

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) \exp(\log x) - \exp(\log x)}{x^2} = 0,$$

donc f est une constante. Ensuite, $f(1) = 1 \Rightarrow \exp(\log x) = x$.

Maintenant, on pose $g(x) = \log(\exp(x)) - x$, alors

$$g'(x) = \exp(x) \frac{1}{\exp(x)} - 1 = 0.$$

Ainsi, g est constante, donc $g(0) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \log(\exp(x)) = x$.]

Corollaire 2. $\log(e) = 1$.

4. Pour $a > 0$ et x réel, on a

$$\log(a^x) = x \log(a).$$

[Si n est un entier positif, alors on a

$$\log(a^n) = \log(\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ fois}}) = \log a + \cdots + \log a = n \log a.$$

De la même façon, on égalité si n est négatif, avec $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. Si $x = \frac{p}{q}$ un rationnel, alors

$$q \log(a^{\frac{p}{q}}) = \log(a^p) = p \log(a),$$

donc $\log(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} \log a$.

Puisque l'équation $\log(a^x) = x \log a$ est vraie pour tous les x rationnels et que $\log(a^x)$ et $x \log a$ sont continues, il suit que l'équation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

5. $\log$ est strictement croissante.

$$\left[\log'(x) = \frac{1}{x} > 0 \right]$$

$\log$ est concave.

$$\left[\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \right]$$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$

[En effet, $\log(2^k) = k \log 2$ lorsque $k \rightarrow \infty$, donc $\log x \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$ puisque $\log$ est croissante. De même, $\log(2^{-k}) = -k \log 2 \rightarrow -\infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$ et donc, encore comme $\log$ est croissante, il suit que $\log x \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.]

7. Pour $\varepsilon > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \log x = 0$.

[La première limite est une forme indéterminée ∞/∞ . Par l'Hôpital, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

Pour la deuxième, on pose $y = \frac{1}{x}$ et on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \log x = \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-\varepsilon} \log \left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{\log y}{y^\varepsilon} = 0.]$$

8. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ si $|x| < 1$.

[On pose $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ une série entière de rayon de convergence 1. Donc f est dérivable sur $(-1, 1)$ et

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} = \log'(1+x).$$

Il suit que $(f(x) - \log(1+x))' = 0$, c'est-à-dire que $f(x) - \log(1+x) = C$, une constante. Comme $f(0) - \log(1) = 0$, on a que $C = 0$. D'où $f(x) = \log(1+x)$.]

4.3. cos et sin

Définition 1. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Ces deux séries entières ont un rayon de convergence $R = \infty$.

Propriétés de cos et sin.

0. $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

1. $\cos$ est une fonction paire ($\cos(-x) = \cos x$) et $\sin$ est une fonction impaire ($\sin(-x) = -\sin x$).

[Seulement des puissances paires dans $\cos$ et des puissances impaires dans $\sin$.]

2. $\cos$ et $\sin$ sont dérivables et

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= -\sin(x) \\ \sin'(x) &= \cos(x).\end{aligned}$$

[Dériver les séries entières termes à termes.]

3. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et si $f'' + f = 0$, alors f est la forme $f(x) = A \cos x + B \sin x$, où A, B sont des constantes.

[On pose $A := f(0)$ et $B = f'(0)$. On définit $g(x) = f(x) - (A \cos x + B \sin x)$. On voit alors que $g'' + g = 0$, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$. On considère ensuite $h = g^2 + (g')^2$. On a

$$h' = 2gg' + 2g'g'' = 2g'(g + g'') = 0.$$

Ainsi h est constante. Comme $h(0) = g(0)^2 + g'(0)^2 = 0$, il suit que $h \equiv 0$, c'est-à-dire $g(x)^2 + g'(x)^2 = 0$. On conclut que $g(x) = 0$ pour tout x donc que $f(x) = A \cos x + B \sin x$.]

4. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

[On pose $f(x) = \cos(a + x)$, alors $f'' + f = 0$. D'après la propriété 3, il existe A, B tels que

$$f(x) = A \cos x + B \sin x,$$

c'est-à-dire

$$(*) \quad \cos(a + x) = A \cos x + B \sin x \quad \forall x.$$

Si on pose $x = 0$, on obtient $A = \cos a$. En dérivant $(*)$ et en posant $x = 0$, obtient $B = -\sin a$. En remplaçant dans $(*)$, on obtient

$$(**) \quad \cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$$

et en prenant $x = b$, on obtient la formule pour $\cos(a + b)$.

La formule pour $\sin(a + b)$ se démontre de façon semblable (ou bien on peut dériver $(**)$).]

5. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (prendre $a = x$ et $b = -x$)

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \quad (\text{prendre } a = x \text{ et } b = x)$$

6. $|\cos x| \leq 1$
 $|\sin x| \leq 1$ pour tout x

[Conséquence immédiate de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.]

Pour étudier la question de la périodicité, on a besoin d'un lemme technique.

Lemme 2. Dans $[0, 2]$, la fonction $\cos$ a une unique racine ω .

Démonstration. Au plus une racine : On remarque que $\cos' x = -\sin x$. Or, pour $x \in (0, 2]$, on a

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \dots \\ &> 0.\end{aligned}$$

Il suit que $\cos' x < 0$ pour $x \in (0, 2]$ et donc $\cos x$ est strictement décroissante dans $[0, 2]$. Ainsi, $\cos$ a au plus une racine dans $[0, 2]$.

Au moins une racine : D'abord, on note que $\cos(0) = 1$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \dots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \underbrace{\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right)}_{\geq 0} - \underbrace{\left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right)}_{\geq 0} - \dots \\ &\leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} \\ &= 1 - 2 + \frac{16}{24} < 0.\end{aligned}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine de $\cos$ dans $(0, 2)$. □

Définition 3. On pose $\pi := 2\omega$, où ω est l'unique racine de $\cos$ dans $[0, 2]$.

Remarque : $0 < \pi < 4$.

7. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

[$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ par définition de π . Aussi, par 5, $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$. On a vu dans la démonstration du lemme que $\sin(x) > 0$ sur $(0, 2)$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$.]

8. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

[Suit de 4 et 7]

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

[Appliquer deux fois l'identité précédente]

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

[Appliquer deux fois l'identité précédente]

9. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

[*Dém.* $\Leftarrow$] D'abord, on a $\sin(n\pi) = -\sin((n-1)\pi) = (-1)^n \sin(0) = 0$. Ensuite, on a $\cos((n + \frac{1}{2})\pi) = -\cos((n - \frac{1}{2})\pi) = (-1)^n \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Pour $n \geq 0$, on remarque que, puisque $\sin$ est impaire, on a $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi)$.

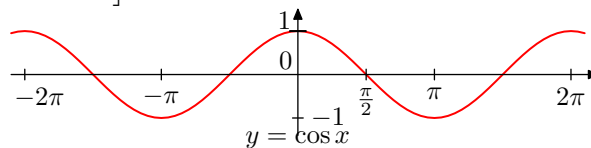
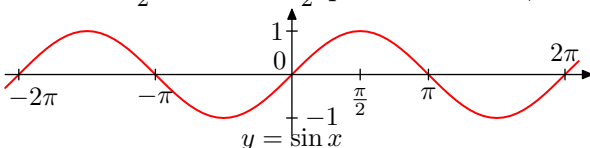
$\Rightarrow$) On remarque d'abord que $\cos$ n'a pas de racine dans $[0, \frac{\pi}{2})$. Comme $\cos$ est paire, elle n'a pas de racine dans $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ non plus, donc $\cos x \neq 0$ pour tout $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

On suppose que $\cos x_0 = 0$ pour un $x_0 \in \mathbb{R}$. Puisque $\cos(x + \pi) = -\cos x$ pour tout x , il suit que

$$\cos(x_0 + n\pi) = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pose n tel que $x_0 + n\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\cos x \neq 0$ pour tout $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, il suit que $x_0 + n\pi = \frac{\pi}{2}$, donc $x_0 = -n\pi + \frac{\pi}{2}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$.

On suppose que $\sin(x_1) = 0$. Comme $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, il suit que $\cos(x_1 + \frac{\pi}{2}) = 0$, donc $x_1 + \frac{\pi}{2} = -n\pi + \frac{\pi}{2}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$, d'où $x_1 = -n\pi$.]



10. Quelques valeurs importantes

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

[*Dém.* de $\cos(\frac{\pi}{4})$. On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$, donc $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$. En particulier, on a

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, par définition de π . Il suit que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus, on a déjà montré que $\cos x > 0$ pour $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, donc on conclut que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dém. de $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Encore, on utilise $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$, d'où $2\cos^2(\frac{\pi}{3}) = 1 + \cos(\frac{2\pi}{3})$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin \pi \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Si on substitue ceci dans la formule précédente, on obtient

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

c'est-à-dire que $\cos(\frac{\pi}{3})$ est une racine de l'équation

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 1 - x \\ 2x^2 + x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les racines de cette équation sont

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } -1.$$

Comme $\cos x > 0$ pour $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, il suit que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.]

11. Aire et circonférence d'un disque de rayon r .

L'aire d'un disque de rayon $r = \pi r^2$.

La circonférence d'un disque de rayon $r = 2\pi r$.

[Soit $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, l'équation d'un demi-cercle. On a

$$\begin{aligned} \text{l'aire} &= 2 \int_{-r}^r f(x) dx \\ &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx & x = r \sin u \\ & & dx = r \cos u du \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u} \cos u du \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos u r \cos u du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 (1 + \cos(2u)) du & (\text{car } \cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}) \\ &= \left[r^2 \left(u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi r^2. \end{aligned}$$

Formule pour la longueur d'arc du graphe de $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$: on définit la longueur ℓ par

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ainsi on a

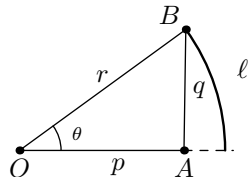
$$\begin{aligned} \text{la circonférence} &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + f'(x)^2} dx & \text{où } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx & \left(\begin{array}{l} x = r \sin u \\ dx = r \cos u du \end{array} \right) \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u}} r \cos u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \, du \\
&= 2\pi r.
\end{aligned}$$

D'où l'aire est bien πr^2 et la circonférence, $2\pi r$. Ceci réconcilie π avec sa définition usuelle.]

12. Trigonométrie. Pour faire de la trigonométrie, il faut définir la notion *d'angle*. Soit O, A, B trois points distincts. On pose

$$p = \overline{OA}, \quad q = \overline{AB} \quad \text{et} \quad r = \overline{OB}.$$



Il est suffisant de considérer le cas où p, q, r vérifie $p^2 + q^2 = r^2$, quitte à remplacer A par A' colinéaire à A de sorte à vérifier l'identité. L'angle ABC est défini comme la longueur de l'arc d'un cercle de rayon 1 centré en B allant de B jusqu'à la droite $\overrightarrow{OA}$, comme sur la figure. Suivant la figure, on voit que l'angle AOB , noté θ vérifie

$$\theta = \frac{\ell}{r}.$$

Par la formule de longueur d'arc, on a

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_p^r \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx \\
&= \int_p^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx & \begin{array}{ll} x = r \cos u & x = r \leftrightarrow u = 0 \\ dx = -r \sin u \, du & x = p \leftrightarrow u = \alpha \\ & \text{où } r \cos \alpha = p \end{array} \\
&= \int_\alpha^0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 u}} (-r \sin u) \, du \\
&= \int_\alpha^0 -r \, du = r\alpha.
\end{aligned}$$

Donc finalement, $\theta = \frac{\ell}{r} = \alpha$, c'est-à-dire que θ est la solution de $\cos \theta = \frac{p}{r}$.

4.4. arcsin et arccos

Définition 1. $\arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$ angle entre l'axe des x et le point $(x, \sqrt{1-x^2})$

$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$ angle entre l'axe des y et le point $(x, \sqrt{1-x^2})$

pour $x \in [-1, 1]$.

Propriétés.

0. $\arcsin 0 = 0$

$\arccos 1 = 0$

1. $\arccos$ et $\arcsin$ sont bien définies.

[On fixe $0 \leq x \leq 1$. Pour $x \leq t < 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on voit que

$$\begin{aligned} \int_x^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= -2\sqrt{1-t} \Big|_x^{1-\varepsilon} \\ &= -2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-1+\varepsilon}, \end{aligned}$$

donc cette intégrale impropre converge. Par le test de comparaison, l'intégrale $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge aussi. Un argument semblable fonctionne si $-1 \leq x \leq 0$.]

2. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

[Longueur d'un quart de cercle.]

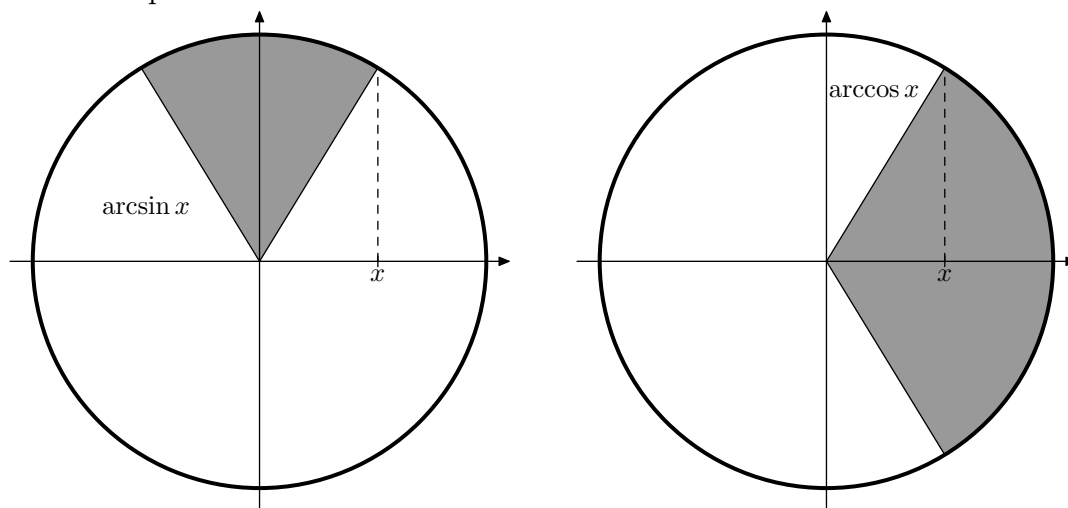
3. $\arccos$ et $\arcsin$ sont dérivables sur $(-1, 1)$ et

$$\arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. $\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2 \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt$

$$\arcsin x = 2 \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt - x\sqrt{1-x^2}$$

et elles correspondent aux aires suivantes :



[Pour arccos, on a

$$\begin{aligned}
 \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt &= \int_x^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \int_x^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_x^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad u=t \quad dv = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &\quad du = dt \quad v = -\sqrt{1-t^2} \\
 &= \arccos x + t\sqrt{1-t^2} \Big|_x^1 - \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt,
 \end{aligned}$$

donc $2 \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt = \arccos x - x\sqrt{1-x^2}$.

Pour arcsin, on peut utiliser la propriété 2 ou refaire la même démarche.]

5. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{et} \quad \sin(\arcsin x) = x$$

et

$$\begin{aligned}
 \arccos(\cos y) &= y \quad \text{pour } y \in [0, \pi] \\
 \arcsin(\sin y) &= y \quad \text{pour } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].
 \end{aligned}$$

[D'abord, on voit que $\cos' x = -\sin x < 0$ pour $x \in (0, \pi)$, donc $\cos$ est injective sur $[0, \pi]$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
 \arccos x &= \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} & t &= \cos u \\
 &= \int_\alpha^0 \frac{-\sin u}{\sqrt{1-\cos^2 u}} du & dt &= -\sin u du \\
 &= \alpha. & x &= \cos(\alpha) \\
 & & & \text{où } \alpha \text{ est l'unique} \\
 & & & \alpha \in [0, \pi] \text{ tel que} \\
 & & & x = \cos(\alpha)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\cos(\arccos x) = x$.

Ensuite, on a $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$.

Enfin, pour $y \in (0, \pi)$, on a

$$\frac{d}{dy} \arccos(\cos y) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} (-\sin y) = 1,$$

donc $\arccos(\cos y) = y + C$. En $y = 0$, on a $\arccos(1) = 0 = C$, d'où $\arccos(\cos y) = y$.]

4.5. tan et arctan

Définition 1. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (définie pour $x \neq 0(n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}$)

Propriétés.

0. $\tan(0) = 0$

1. $\tan$ est une fonction impaire

2.
$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

On note que $\tan'(x) > 0$ pour tout $x \neq (n + \frac{1}{2})\pi$.

3. $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

[On a

$$\begin{aligned}\tan(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}\end{aligned}$$

On divise partout par $\cos a \cos b$

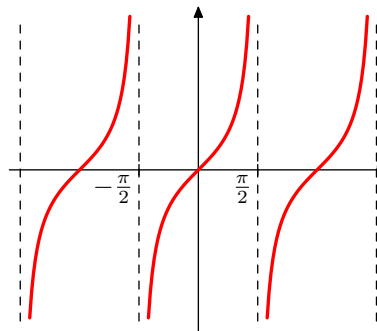
$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.]$$

4. $\tan(x + \pi) = \tan x$ pour tout $x \neq (n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}$

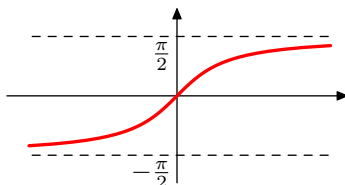
5.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$



Définition 2. $\tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection. Son inverse est $\arctan: \mathbb{R}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



6. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

[Sur $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\tan$ est strictement croissante, surjective et dérivable, donc $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (théorème d'analyse 1).

On dérive l'équation $\tan(\arctan x) = x$:

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

7. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$ pour tout $|x| < 1$.

[On pose $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, une série de rayon de convergence 1. Si on dérive terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots && (|x| < 1) \\ &= \frac{1}{1+x^2} && (\text{progression géométrique}) \\ &= \arctan'(x).\end{aligned}$$

Il suit que $f(x) = \arctan(x) + C$, où C est une constante. Comme $f(0) = \arctan(0) + C = 0$, on a $C = 0$, d'où $\arctan(x) = f(x)$ pour tout $|x| < 1$.]

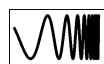
En prenant $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on déduit que

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - \dots = \frac{\pi}{6},$$

donc

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots\right).$$

Avec quelques approximations, on trouve $\pi \approx 3,1415926\dots$



Le travail complet pour obtenir l'approximation est intéressant. D'abord, on aura besoin d'une approximation de $\sqrt{3}$. On part avec le fait que

$$\frac{64}{25} \leq 3 \leq \frac{81}{25} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{8}{5} \leq \sqrt{3} \leq \frac{9}{5}$$

et donc $|\sqrt{3} - \frac{17}{10}| \leq \frac{1}{10}$. Ensuite, on utilise la méthode de Newton. On pose $f(x) = x^2 - 3$, $F(x) = x - \frac{x^2 - 3}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}$ et $x_0 = \frac{17}{10}$. D'abord, on remarque pour $x \in I := [\frac{8}{5}, \frac{9}{5}]$, on a

$$|f'(x)| = |2x| \geq 1 \quad \text{et} \quad |f''(x)| = 2.$$

On pose $K = \frac{\max_I |f''(x)|}{2 \min_I |f'(X)|} \leq 1$. Les itérées de la méthode de Newton sont

$$\begin{aligned}x_1 &= F(x_0) = \frac{589}{340} \\x_2 &= F(x_1) = \frac{693\,721}{400\,520}\end{aligned}$$

Selon la méthode de Newton, on a $|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq K|x_n - \sqrt{3}|^2$, où $K \leq 1$. Ainsi, on peut remplacer K par 1. Selon le choix initial de x_0 , on a

$$\begin{aligned}|x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}| &\leq |x_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}|^2 \leq \frac{1}{100} \\|x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}| &\leq |x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|^2 \leq \frac{1}{10\,000}\end{aligned}$$

À la deuxième itération, on a déjà une approximation très bonne de $\sqrt{3}$. On écrit $\sqrt{3} = x_2 + r_1$, où $|r_1| \leq \frac{1}{10\,000}$.

Ensuite, la série $s = \frac{6}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots\right)$ est alternée. On pose $a_n = \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^n}$. C'est une suite décroissante, donc le théorème de Leibniz nous donne

$$|\pi - s_n| \leq a_{n+1},$$

où (s_n) est la suite des sommes partielles de s . Avec $n = 5$, on trouve

$$a_6 = \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{13} \frac{1}{3^6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{3159} \leq \frac{2}{3159}$$

et

$$\begin{aligned}s_5 &= \frac{6}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \frac{1}{3^5 \cdot 11}\right) \\&= 2\sqrt{3} \frac{254\,512}{280\,665} \\&= x_2 \frac{509\,024}{280\,665} + r_2,\end{aligned}$$

où $r_2 = r_1 \frac{509\,024}{280\,665}$ et vérifie $|r_2| \leq \frac{1}{5\,000}$. Enfin, on a

$$\left|\pi - x_2 \frac{509\,024}{280\,665}\right| \leq \frac{2}{3159} + |r_2| \leq \frac{1}{1500} + \frac{1}{5000} = \frac{13}{15\,000} \leq \frac{1}{1000}$$

d'où $\pi = 3,141\dots + r_3$, où $|r_3| \leq \frac{1}{1000}$.

Pour obtenir une meilleure précision avec cette méthode, il faudrait itérer davantage le méthode de Newton et garder plus de terme de la série s .

Remarque. Formule de Machin (1708)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

4.6. cosh et sinh

Définition 1. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Propriétés.

0. $\cosh(0) = 1$
 $\sinh(0) = 0$
1. $\cosh$ est une fonction paire
 $\sinh$ est une fonction impaire
2. $\cosh'(x) = \sinh x$
 $\sinh'(x) = \cosh x$
3. $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$
 $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$

[On a

$$\begin{aligned} \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^a e^b}{2} + \frac{e^{-a} e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} \\ &= \cosh(a+b). \end{aligned}$$

La deuxième formule se démontre de la même façon.]

4. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ pour tout x .

[Prendre $a = x$ et $b = -x$ dans 3.]

Ainsi, $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ est une paramétrisation de l'hyperbole, d'où le nom *fonctions hyperboliques*.

5. $\cosh x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 $\sinh x > 0$ pour tout $x > 0$

Donc $\cosh'(x), \sinh'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\cosh''(x), \sinh''(x) > 0$ pour $x > 0$. Il s'ensuit que $\cosh$ et $\sinh$ sont strictement croissantes et convexes pour $x > 0$.

Remarque. On peut imaginer que

$$\begin{aligned}\cosh x &= \cos(ix) \\ \sinh x &= \frac{\sin(ix)}{i},\end{aligned}$$

où $i^2 = -1$. (Voir analyse complexe.)
