

Analyse 2

Université de Montréal — Département de mathématiques

Examen intra(solutionnaire partiel)

Enseignant : Jonathan Godin

Jeudi le 19 février 2026

Session : H26

Aucun matériel permis. L'examen est sur 35 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Question 1. (5pts) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) = \int_a^x f$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille d'intervalles $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \subseteq [a, b]$ deux à deux disjoints, on a

$$\text{si } \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta, \quad \text{alors } \sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

Solution. Comme f est intégrable, elle est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $|f| \leq M$. Il suit que

$$\sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{a_j}^{b_j} f \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |f| \leq \sum_{j=1}^n M(b_j - a_j) < M\delta.$$

Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$.

Question 2. (5pts) Soit I un intervalle. Soit (f_n) une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction. On suppose que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur I . S'il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que f_{n_k} est continue, alors peut-on conclure que f est continue? (Justifiez bien.)

Solution. On montre que $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformément. Dans ce cas, comme chaque f_{n_k} est continue, il en suivra que f est continue par un théorème vu en classe.

Soit $\varepsilon > 0$. comme $f_n \rightarrow f$ uniformément, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|f - f_n| < \varepsilon$ sur I . Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K$, alors $n_k \geq N$, donc pour tout $k \geq K$, on a $|f - f_{n_k}| < \varepsilon$ sur I . D'où $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformément.

Question 3. (10pts) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose qu'il existe une fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$. Soit $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ une partition de $[a, b]$.

Vous ne pouvez pas faire appel au théorème fondamental du calcul pour cette question.

- a) Montrer que $F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1}))$ et déduire que pour chaque $1 \leq j \leq n$, il existe $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tel que

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n f(c_j)(x_j - x_{j-1}).$$

b) À l'aide du a), montrer que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ en utilisant les sommes de Darboux.

Solution. a) L'égalité $F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n \left(F(x_j) - F(x_{j-1}) \right)$ est vraie simplement parce que le côté droit est une somme télescopique.

Ensuite, comme F est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) , on peut appliquer le théorème des accroissements finis (TAF) sur chaque intervalle $[x_{j-1}, x_j]$. Ainsi, il existe $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tel que $F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(c_j)(x_j - x_{j-1})$. Par hypothèse, $F'(c_j) = f(c_j)$. Si on remplace dans $\sum_{j=1}^n \left(F(x_j) - F(x_{j-1}) \right)$, on obtient la deuxième égalité.

b) On sait que $\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \leq f(c_j) \leq \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f$, donc

$$I(f, P) \leq F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n \left(F(x_j) - F(x_{j-1}) \right) \leq S(f, P).$$

Comme cette inégalité est vraie pour toute partition P de $[a, b]$, on peut prendre le supremum sur la première inégalité et l'infimum sur la deuxième inégalité. On trouve

$$\underline{\int_a^b} f \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Comme f est intégrable, chaque côté est égal à $\int_a^b f$, donc $F(b) - F(a) = \int_a^b f$.

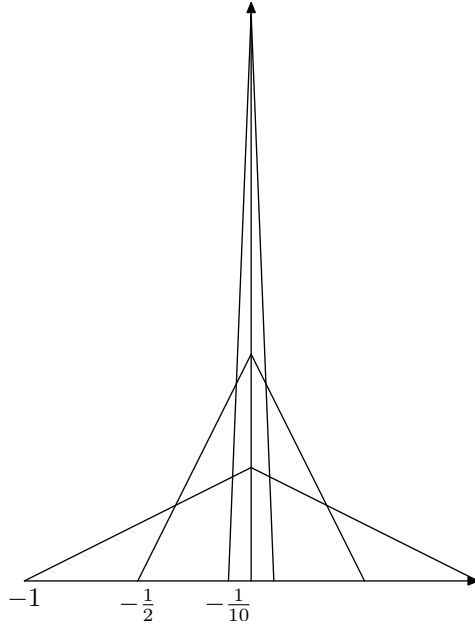
Question 4. (15pts) Soit (L_n) une suite de fonctions de $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L_n(x) = n \max\{1 - n|x|, 0\} = \begin{cases} n(1 - n|x|), & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n} < |x| \leq 1. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de L_n pour $n \in \{1, 2, 10\}$ sur un même dessin. Calculer $\int_{-1}^1 L_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-il possible que $L_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-1, 1]$?
- b) Montrer que pour tout $0 < \lambda < 1$, L_n converge vers 0 uniformément sur $[-1, 1] \setminus (-\lambda, \lambda)$.
- c) Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) L_n(x) dx = f(0)$.

Suggestion. Utiliser (et justifier) le fait que $f(0) = \int_{-1}^1 f(0) L_n(x) dx$.

Solution. a) Selon la définition de f , il est clair que f est une droite de pente positive sur $[-\frac{1}{n}, 0]$, et de pente négative sur $[0, \frac{1}{n}]$. On trouve donc le graphe suivant :



Comme le graphe est un triangle, l'aire sous la courbe est simplement $\frac{\frac{2}{n} \times n}{2} = 1$. Il est impossible que $L_n \rightarrow 0$ uniformément, autrement on aurait $\int_{-1}^1 L_n \rightarrow 0$, mais ce n'est pas le cas.

b) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \lambda$. Pour tout $n \geq N$, on a $\frac{1}{n} < \lambda$ et donc sur $[-1, 1] \setminus (-\lambda, \lambda)$, L_n est identiquement nulle. Il suit que $L_n \rightarrow 0$ sur $[-1, 1] \setminus (-\lambda, \lambda)$.

c) C'est la même démarche que le devoir, mais un peu plus simple.

Comme f est intégrable, il existe $M \geq 0$ tel que $|f| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|x| < \delta$, on a $|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

De plus, comme $L_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|L_n| < \frac{\varepsilon}{4M+1}$.

Comme $\int_{-1}^1 L_n = 1$, il suit que $\int_{-1}^1 f(0)L_n = f(0)$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \left| f(0) - \int_{-1}^1 f L_n \right| &= \left| \int_{-1}^1 (f(0) - f(x)) L_n \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(0) - f(x)| L_n \\ &= \left(\int_{(-\delta, \delta)} + \int_{[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)} \right) |f(0) - f(x)| L_n. \end{aligned}$$

On a

$$\int_{(-\delta, \delta)} |f(0) - f(x)| L_n < \frac{\varepsilon}{2} \int_{(-\delta, \delta)} L_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 L_n = \frac{\varepsilon}{2}.$$

et

$$\int_{[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)} |f(0) - f(x)| L_n \leq 2M \int_{[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)} L_n < \frac{2M\varepsilon}{4M+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En combinant, on trouve bien que pour tout $n \geq N$, on a $\left| f(0) - \int_{-1}^1 f L_n \right| < \varepsilon$.