

Analyse 2

Université de Montréal — Département de mathématique

Examen intra

Enseignant : Jonathan Godin
Session : H26

Jeudi le 19 février 2026

Aucun matériel permis. L'examen est sur 35 points et il dure 1h50 (110 minutes).
Justifiez toutes vos réponses.

Question 1. (5pts) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On pose $F(x) = \int_a^x f$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille d'intervalles $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \subseteq [a, b]$ deux à deux disjoints, on a

$$\text{si } \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta, \quad \text{alors } \sum_{j=1}^n |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

Question 2. (5pts) Soit I un intervalle. Soit (f_n) une suite de fonctions de $I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction. On suppose que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur I . S'il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que f_{n_k} est continue, alors peut-on conclure que f est continue? (Justifiez bien.)

Question 3. (10pts) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose qu'il existe une fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$. Soit $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ une partition de $[a, b]$.

Vous ne pouvez pas faire appel au théorème fondamental du calcul pour cette question.

- a) Montrer que $F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1}))$ et déduire que pour chaque $1 \leq j \leq n$, il existe $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tel que

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n f(c_j)(x_j - x_{j-1}).$$

- b) À l'aide du a), montrer que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ en utilisant les sommes de Darboux.

Question 4. (15pts) Soit (L_n) une suite de fonctions de $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L_n(x) = n \max\{1 - n|x|, 0\} = \begin{cases} n(1 - n|x|), & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n} < |x| \leq 1. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de L_n pour $n \in \{1, 2, 10\}$ sur un même dessin. Calculer $\int_{-1}^1 L_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Est-il possible que $L_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[-1, 1]$?
- b) Montrer que pour tout $0 < \lambda < 1$, L_n converge vers 0 uniformément sur $[-1, 1] \setminus (-\lambda, \lambda)$.
- c) Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) L_n(x) dx = f(0)$.

Suggestion. Utiliser (et justifier) le fait que $f(0) = \int_{-1}^1 f(0) L_n(x) dx$.