

Analyse 2

Examen intra – automne 2021

Jeudi le 28 octobre 2021

L'examen dure 110 minutes. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez vos réponses.**

L'examen est sur 36 points et il y a 4 points bonus. Votre note ne peut dépasser le maximum de 36.

/36

Exercice 1. (8pts) Trouver une série entière centrée en 0 pour la solution $y = f(x)$ du problème

$$\begin{cases} y = y'', \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Déterminer son rayon de convergence R . (Vous ne pouvez pas utiliser la fonction exponentielle pour répondre à cette question.)

Exercice 2. (8pts) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer à l'aide de la définition que pour tout $c \in (a, b)$

$$\overline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^c f} + \overline{\int_c^b f}.$$

Exercice 3. (8pts) Soit (p_n) une suite de polynômes.

- Montrer que si p_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f , alors f est un polynôme.
- (bonus 4pts) Montrer que cela est faux si p_n converge uniformément vers f sur l'intervalle borné $[a, b]$ plutôt que sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (12pts) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- $f(0) = 0$,
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $0 < f'(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer l'inégalité suivante

$$\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f \right)^2 \quad \text{pour } x \in [0, \infty).$$

Indices. Étudiez les fonctions $g(x) = \int_0^x f^3 - \left(\int_0^x f \right)^2$ et $h(x) = f(x)^2 - 2 \int_0^x f$. Réfléchissez bien aux conséquences des hypothèses 1 à 3.

Note. Ici, f^3 signifie $(f(y))^3$. De même pour f^2 .