

Analyse 2

Examen final – automne 2022

Faculté des arts et des sciences – Département de mathématiques et de statistique

Enseignant : Jonathan Godin

Signle : MAT2050A

Date : jeudi le 15 décembre 2022

L'examen dure 170 minutes. Vous n'avez droit à aucun matériel, autre qu'un crayon (ou un stylo) et une efface. **Justifiez vos réponses.**

/55

Vous pouvez utiliser les formules suivantes au besoin :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a.$$

Exercice 1. (10pts) Montrer que $\sin$ n'est pas une fonction rationnelle, c'est-à-dire qu'il n'existe aucuns polynômes p, q tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Exercice 2. (10pts) Soit $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(xy) = f(x) + f(y)$. On suppose que $f'(1) > 0$ et on pose $a = \exp(\frac{1}{f'(1)})$. Montrer que $f(x) = \log_a x$ pour tout $x > 0$.

Indice. Attention, vous ne pouvez pas utiliser directement le TFC2. Voyez-vous pourquoi ? Vous pouvez définir une fonction g bien choisie et calculer g' ou bien argumenter que le TFC2 s'applique.

Exercice 3. (10pts) Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \rightarrow \infty$ et $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Calculer les limites suivantes. Suggestion : utiliser les petits o .

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n}$

(Suite au verso)

Exercice 4. (15pts) a) Montrer que $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

b) Calculer la série de Fourier de $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$. Est-ce qu'elle converge uniformément vers f ?

c) Donner la série de Fourier $g(x) = \sin(\frac{x}{2})$ à partir de celle de f . (Remarquer que $g(x) = -2f'(x)$.) Si vous n'avez pas pu faire le b), donnez votre réponse en terme de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$. Justifiez bien.

Exercice 5. (10pts) Soit $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soit (s_n) la suite des sommes partielles suivantes :

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx),$$

où $a_n := a_n(f)$ et $b_n := b_n(f)$. On suppose que $s_n \rightarrow f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

a) Montrer que $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (s_n - f)^2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

b) Montrer que $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (s_n f)$ et $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2$ valent toutes les deux

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

c) Dédurre l'égalité de Parseval, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

(Remarque : dans f^2 et s_n^2 , le $\cdot^2$ signifient « élevée au carré ».)