

Probabilités et statistique

Série 7

Distribution d'un vecteur aléatoire (solutionnaire)

Exercice 1. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire. Sa distribution est donnée par le tableau suivant.

$X \setminus Y$	1	2	3
1	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$
3	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{1}{32}$
4	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$

- Vérifier que $p_{(X,Y)}$ est bien une fonction de masse.
- Calculer $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3 \text{ et } Y = 3)$.
- Calculer les lois marginales p_X de X et p_Y de Y .
- X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire. Sa distribution est donnée par le tableau suivant.

$X \setminus Y$	2	3	4
4	a	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$
5	$\frac{5}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{6}{35}$
6	$\frac{4}{35}$	b	$\frac{3}{35}$

- Trouver toutes les valeurs possibles de a et b pour lesquelles ce tableau décrit une fonction de masse conjointe.
- Quelle est la valeur maximale possible de a ?

Solution. a) Ce tableau décrit une fonction de masse conjointe ssi [tous les éléments sont positifs et leur somme vaut 1]. On a donc

$$a + \frac{1}{35} + \frac{4}{35} + \frac{5}{35} + \frac{2}{35} + \frac{6}{35} + \frac{4}{35} + b + \frac{3}{35} = 1 \quad \text{et} \quad a, b \geq 0.$$

On a donc $a + b = 1 - \frac{25}{35} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\{a, b \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a \leq \frac{2}{7}, b = \frac{2}{7} - a\}.$$

b) Comme $0 \leq a \leq \frac{2}{7}$, elle atteint sa valeur maximale en $a = \frac{2}{7}$, auquel cas $b = 0$.

Exercice 3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxe^{-xy}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Trouver la valeur de C pour laquelle f est une fonction de densité conjointe.
 b) Calculer les lois marginales.

Solution. a) Il faut $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = 1$. Cela nous permet de trouver C .

On a

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 Cxe^{-xy} dy dx \\ &= C \int_0^1 \frac{xe^{-xy}}{-x} \Big|_{y=0}^1 dx \\ &= C \int_0^1 (-e^{-x} + 1) dx \\ &= C \left(e^{-x} \Big|_0^1 + 1 \right) \\ &= C(e^{-1} - 1 + 1) = \frac{C}{e}. \end{aligned}$$

On conclut que $C = e$.

b) Pour la loi marginale de X , on a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 xe^{-xy+1} dy \\ &= \frac{xe^{-xy+1}}{-x} \Big|_{y=0}^1 && \text{(si } x \neq 0) \\ &= -e^{-x+1} + e. \end{aligned}$$

Remarquons que si $x = 0$, alors le calcul devient $\int_0^1 0 = 0$. On a donc

$$f_X(x) = \begin{cases} -e^{-x+1} + e, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la loi marginale de Y , on a, si $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\
 &= \int_0^1 x e^{-xy+1} dx \\
 &= -x \frac{e^{-xy+1}}{y} \Big|_{x=0}^1 + \int_0^1 \frac{e^{-xy+1}}{y} dx \\
 &= -\frac{e^{-y+1}}{y} - \frac{e^{-xy+1}}{y^2} \Big|_{x=0}^1 \\
 &= -\frac{e^{-y+1}}{y} - \frac{e^{-y+1}}{y^2} + \frac{e}{y^2}.
 \end{aligned}$$

$u = x$	$v' = e^{-xy+1}$
$u' = 1$	$v = -\frac{e^{-xy+1}}{y}$

Si $y = 0$, alors le calcul devient $\int_0^1 ex dx = \frac{e}{2}$. On a donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{e^{-y+1}}{y} - \frac{e^{-y+1}}{y^2} + \frac{e}{y^2}, & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ \frac{e}{2}, & \text{si } y = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4. On choisit deux points au hasard de façon uniforme et indépendante dans l'intervalle $[0, 1]$. Soit $X =$ valeur du premier point et $Y =$ valeur du deuxième point.

- Déterminer la fonction densité conjointe de (X, Y) .
- Calculer $\mathbb{P}(X < 2Y)$.

Exercice 5. On choisit trois points au hasard de façon uniforme et indépendante dans l'intervalle $[0, 1]$. Soit $X_j =$ valeur du j -ième point.

- Déterminer la fonction densité conjointe de (X_1, X_2, X_3) .
- On pose $Z = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. Calculer la fonction de densité de Z .

Exercice 6. On répète une expérience n fois de façon indépendante. La probabilité d'un succès est p . On définit

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{si la } j\text{-ième épreuve est un succès,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose ensuite $Z = X_1 + \dots + X_n$.

- a) Quelle est la loi de probabilité de Z ?
 b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 7. On lance un dé à six faces équilibré jusqu'à obtenir un 1. Soit $X =$ nombre de lancers pour obtenir le premier un et $Y =$ nombre de six obtenus parmi les lancers.

- a) Calculer la fonction de masse conjointe de (X, Y) .
 b) Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
 c) Calculer l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = x$.

Solution. a) On utilise les probabilités conditionnelles. En effet, si on connaît X , alors la loi de Y est une « binomiale($X - 1, 1/5$) » (-1 car le dernier lancer est nécessairement un 1 et ne peut pas être un 6 et $\frac{1}{5}$ car on sait que les lancers ne sont pas 1, donc il y a 5 possibilités). De plus, on sait que X suit une loi géométrique($1/6$). En combinant, on obtient

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y|X = x) \\
 &= \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{6}\right) \right] \times \left[\binom{x-1}{y} \left(\frac{1}{5}\right)^y \left(\frac{4}{5}\right)^{x-y-1} \right] \\
 &= \binom{x-1}{y} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^y \left(\frac{4}{5}\right)^{x-y-1} \\
 &= \binom{x-1}{y} \frac{4^{x-y-1}}{6^x}
 \end{aligned}$$

b) On peut calculer cette probabilité de plus d'une façon. Nous allons le faire en utilisant la fonction de masse conjointe trouvée au a). On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} p(x, 0) \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} p(x, 0) \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} \binom{x-1}{0} \frac{4^{x-1}}{6^x} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{2}{3-2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

c) Si on sait que $X = x$, alors Y suit une loi binomiale $(x - 1, 1/5)$. Dans ce cas, $\mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{x-1}{5}$.

Exercice 8. Une urne contient trois boules numérotés de 1 à 3. On fait des tirages avec remise jusqu'à obtenir la boule numéroté 3. Soit $Y =$ le nombre de fois que la boule 1 est tirée parmi les tirages.

- Calculer la fonction de masse de Y .
- Calculer la probabilité que la boule numéroté 1 soit tirée autant de fois que la boule numéroté 2.

Solution. a) Soit $X =$ nb de tirage pour obtenir la boule 3.

Les variables X et Y sont très similaires à celles du numéro 7. En effet, si on sait que $X = x$, alors Y suit une loi binomiale $(x - 1, 1/3)$. De plus, X suit une loi géométrique $(1/3)$.

Commençons par calculer la fonction de masse conjointe. On trouve

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y|X = x) \\ &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{3}\right) \right] \times \left[\binom{x-1}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1-y} \right] \\ &= \binom{x-1}{y} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \binom{x-1}{y} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \binom{x-1}{y} \frac{1}{3^x} \end{aligned}$$

Pour la fonction de masse marginale de Y , on a

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} p(x, y) = \sum_{x=y+1}^{\infty} \binom{x-1}{y} \frac{1}{3^x}.$$

On peut laisser l'équation comme ça, mais il est possible de la calculer exactement. En effet, si on dérive la formule de la série géométrique y fois, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^y}{dr^y} \frac{1}{1-r} &= \frac{d^y}{dr^y} \sum_{x=1}^{\infty} r^{x-1} \Rightarrow \frac{y!}{(1-r)^{y+1}} = \sum_{x=y+1}^{\infty} (x-1) \cdots (x-y) r^{x-y-1} \\ &\Rightarrow \frac{r^{y+1}}{(1-r)^{y+1}} = \sum_{x=y+1}^{\infty} \binom{x-1}{y} r^x \end{aligned}$$

En prenant $r = \frac{1}{3}$, on trouve enfin

$$\sum_{x=y+1}^{\infty} \binom{x-1}{y} \frac{1}{3^x} = \frac{\frac{1}{3^{y+1}}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{y+1}} = \frac{1}{2^{y+1}}$$

b) Si $X - 1$ est impaire, alors il est impossible que la boule numéroté 1 et la boule numéroté 2 soient tirées le même nombre de fois.

Si $X - 1$ est paire, alors on cherche $\mathbb{P}(Y = \frac{X-1}{2})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, si $Y = k$ alors $X = 2k + 1$, donc la probabilité se réécrit

$$\mathbb{P}(Y = \frac{X-1}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k \text{ et } X = 2k + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} p(2k + 1, k).$$

On a donc

$$\mathbb{P}(Y = \frac{X-1}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{3^{2k+1}}.$$

On peut laisser la réponse comme cela.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- Montrer que $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.
- On appelle cette formule la *propriété d'absence de mémoire*. Si $X =$ temps d'attente, donner une interprétation de cette formule par rapport à ce contexte.

Exercice 10. Soit $X \sim$ exponentielle(α) et $Y \sim$ exponentielle(β), où α et β sont strictement positifs. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.