Probabilités et statistique

Série 5

Espérance et variables aléatoires absolument continues (solutionnaire)

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X)$ existe. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ des constantes. Montrer que $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Solution. Cas discret : on a

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_{x\in\mathbb{R}} (ax+b)p(x) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \big(axp(x)+bp(x)\big) = a\sum_{x\in\mathbb{R}} xp(x)+b\sum_{x\in\mathbb{R}} p(x) = a\mathbb{E}(X)+b\cdot 1.$$

Le cas absolument continue est analogue. Je vous laisse le faire.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ avec fonction de masse $p(k) = \frac{1}{n}$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

Solution. C'est un calcul direct. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} kp(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Pour X^2, on trouve

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3. Trouver un exemple d'une variable aléatoire discrète X telle que $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.
Suggestion. Il y a plus d'un exemple possible. Vous pouvez construire un exemple à partir de celui fait en classe de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solution. Soit X à valeurs dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ayant pour densité de masse $p(k) = \frac{1}{|k|(|k|+1)}$. Alors on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|p(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{|k|}{2|k|(1+|k|)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{2(1+|k|)} = \infty,$$

donc l'espérance n'existe pas.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x^2}{10}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$.

b) Calculer la fonction de densité de X.

Solution. a) On a $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-\frac{4}{10}}) = e^{-\frac{2}{5}}$.

b) Il suffit de dériver F. Pour $x > 0$, on a

$$f(x) = F'(x) = \frac{x}{5} e^{-\frac{x^2}{10}}.$$

Pour $x \leq 0$, on a $f(x) = 0$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire absolument continue et soit f_X sa densité donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/x^2, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Désiner le graphe de cette densité.

b) Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$.

c) Calculer l'espérance de X.

d) Calculer la fonction de répartition de X.

e) Recalculer l'espérance de X en utilisant la formule qui utulise la fonction de répartition.

Exercice 6. La densité d'une certaine variable aléatoire X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} -c|x| + c, & \text{si } |x| < 1, \\ -2c|x-4| + 2c, & \text{si } |x-4| < 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Trouver la valeur de c.

b) Trouver la médiane, c'est-à-dire la valeur m telle que $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$.

c) Calculer l'espérance de X.

Solution. a) Si on graphe, on voit que il est formé de deux triangle. L'aire du premier triangle est $\frac{2\times c}{2} = c$ et l'aire du deuxième est $\frac{2\times(2c)}{2} = 2c$. Ainsi, l'aire totale est $3c$. Il faut $3c = 1$, donc $c = \frac{1}{3}$.

b) L'aire du premier triangle est $\frac{1}{3}$, donc il faut trouver la valeur $3 \leq m \leq 5$ tel que l'aire du triangle de 3 à m donne $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Vu que $\mathbb{P}(X \geq 4) \geq \frac{2}{3}$, on sait que $m < 4$.

On a donc

$$\frac{1}{6} = \int_3^m \left(-\frac{2}{3}|x-4| + \frac{2}{3}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \int_3^m \big(1 - (4-x)\big) \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\int_3^m (x-3)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\left(\tfrac{m^2}{2} - 3x\right)\Big|_3^m \\
&= \frac{2}{3}\left(\tfrac{m^2}{2} - 3m + \tfrac{9}{2}\right).
\end{aligned}
$$

On a donc $m^2 - 6m + 9 = \frac{1}{2}$. Le côté gauche est un carré parfait et se simplifie en $(m-3)^2$, donc on trouve $m = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il faut $m > 3$, donc on rejette $3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Conclusion : la médiane est $m = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 7. Une usine fabrique des pièces d'une composante électrique. La longueur des pièces (en mm) est une variable aléatoire qui a une densité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} c(3-x)(x-2), & \text{si } 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Trouver la valeur de c.

b) Calculer la longueur moyenne des pièces.

c) Les pièces plus de 2,75mm de long sont inutilisables. Calculer la proportion de telles pièces.

Exercice 8. On considère 5 points choisis au hasard de façon uniforme dans un disque de rayon 10. Les points sont choisis indépendamment les uns des autres. On considère la variable $X =$ la distance entre le centre du disque et le point plus près.

a) Obtenir la fonction de répartition de X.

b) Calculer la fonction de densité de X.

c) Calculer l'espérance de X.

Solution. a) Soit $P =$ distance de l'origine d'un point choisi au hasard. D'abord, pour $0 \leq x \leq 10$, on voit que $\mathbb{P}(P \leq x)$ est donnée par l'aire du disque de rayon x divisé par l'aire du disque de rayon 10, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(P \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi 10^2} = \frac{x^2}{100}.$$

Ensuite, on a $X \geq x$ si et seulement si tous les points sont plus loin que x, donc

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \Big(\mathbb{P}(P \geq x)\Big)^5 = \Big(1 - \mathbb{P}(P < x)\Big)^5 = \left(1 - \frac{x^2}{100}\right)^5.$$

On a donc

$$F(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{x^2}{100}\right)^5, & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

b) Il suffit de dériver F. Si $0 \le x \le 10$, on a

$$f(x) = F'(x) = -5\left(1 - \frac{x^2}{100}\right)^4 \left(-\frac{2x}{100}\right) = \frac{x}{10}\left(1 - \frac{x^2}{100}\right)^4.$$

Ainsi, on trouve

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}\left(1 - \frac{x^2}{100}\right)^4, & \text{si } 0 \le x \le 10, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{10} \frac{x^2}{10}\left(1 - \frac{x^2}{100}\right)^4 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 10u^2(1-u^2)^4 10 \mathrm{d}u && (u = x/10) \\
&= 100 \int_0^1 u^2(1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8)\mathrm{d}u \\
&= 100 \int_0^1 (u^2 - 4u^4 + 6u^6 - 4u^8 + u^{10})\mathrm{d}u \\
&= 100\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{6}{7} - \frac{4}{9} + \frac{1}{11}\right) \\
&= 100 \cdot \frac{128}{3465} = \frac{2560}{693}.
\end{aligned}$$

Exercice 9. Refaire le numéro 8 avec n points et un disque de rayon r.

Exercice 10. On choisit un point au hasard de façon uniforme dans un carré 10 par 10. On pose $X =$ la distance entre le point la frontière du carré.

a) Donner la fonction de répartition de X.

b) Calculer la fonction de densité de X.

c) Soit $Y =$ l'aire du plus grand disque contenu dans le carré et centré au point choisi au hasard. Calculer la densité de Y.

d) Calculer l'espérance de Y.

Solution. a) Soit $0 \le x \le 10$. Soit C_x le carré qui passe par les sommets (x, x), $(-x, x)$, $(-x, -x)$ et $(x, -x)$.

Si $X = x$, alors le point se trouve sur le carré C_x. Ainsi, $\mathbb{P}(X \leq x)$ est l'aire de l'ensemble des carrés C_y pour $x \leq y \leq 10$. L'aire du carré 10 par 10 est 100, donc pour $0 \leq x \leq 10$, on a

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{100 - (10-x)^2}{100} = \frac{x^2 - 10x}{100}.$$

On a donc

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2-10x}{100}, & \text{si } 0 < x \leq 10, \\ 1, & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

b) Il suffit de dériver F. Pour $0 \leq x \leq 10$, on a

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x - 10}{100} = \frac{x-5}{50}.$$

On a donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{50}, & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) Si on sait que $X = x$, alors le rayon du disque est x et donc l'aire est πx^2. Ainsi, on a $Y = \pi X^2$. On a donc

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\pi X^2 \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}\right) = F_X\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Si on dérive, on trouve

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}\right) = f_X\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi y}} = \frac{\sqrt{y}/\sqrt{\pi}-5}{50}\frac{1}{2\sqrt{\pi y}} = \frac{y-5\sqrt{\pi}}{100\pi\sqrt{y}}$$

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire avec densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^5}, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Obtenir la densité de la variable $Y = \log(X)$. Remarque : log signifiera toujours $\log_e$ dans le cours.

b) Obtenir la densité de la variable $Z = \frac{1}{X^2}$.