

Probabilités et statistique

Série 4

Indépendance et variables aléatoires discrètes (solutionnaire)

Exercice 1. Pour chaque paire d'événements suivants, déterminer s'ils sont indépendants ou non.

- a) On lance deux dés. A = la somme des dés vaut 6; B = la différence des dés vaut -2.
- b) On pige une boule dans une urne qui contient 10 boules numérotés de 1 à 10. A = la valeur de la boule est plus petit ou égale à 5; B = la valeur de la boule est plus grande ou égale à 5.

Solution. a) On a $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ et $B = \{(4, 6), (3, 5), (2, 4), (1, 3)\}$. On voit que $A \cap B = \{(2, 4)\}$. Il suit que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36},$$

mais $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{20}{36^2} \neq \frac{1}{36}$. Conclusion : A et B ne sont pas indépendants.

b) On peut le faire comme au a). On trouve (je vous laisse écrire les détails) $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A \cap B)$. Ainsi, ils ne sont pas indépendants.

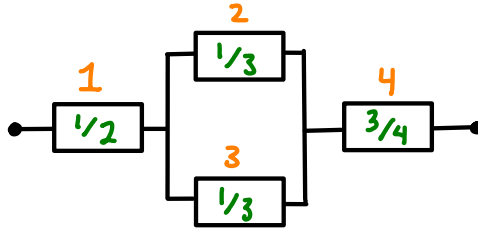
Exercice 2. Soit A et B deux événements indépendants.

- a) Montrer que A^c et B^c sont indépendants.
- b) Montrer que A^c et B sont indépendants.
- c) Est-ce que A et A^c sont indépendants ?

Exercice 3. Soit A , B et C des événements indépendants.

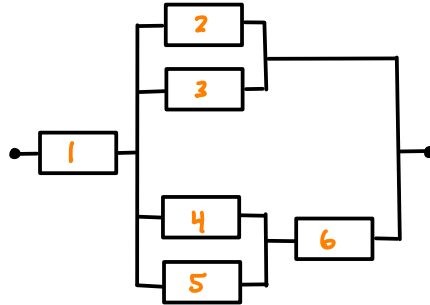
- a) Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.
- b) Montrer que A et $B \cap C$ sont indépendants.

Exercice 4. Calculer la fiabilité du réseau suivant. La probabilité qu'une composante fonctionne est indiquée dans sa boîte.



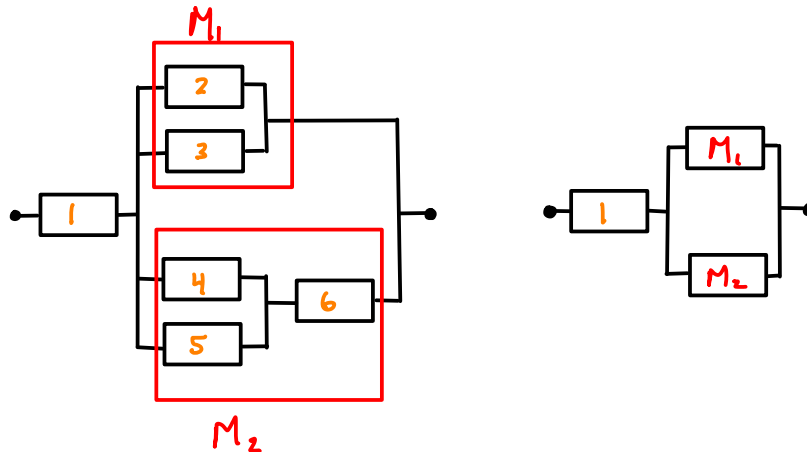
Solution. Réponse : $\frac{5}{24}$

Exercice 5. Calculer la fiabilité du réseau suivant. Toutes les composantes ont la même probabilité p de fonctionner.



Solution. Soit l'événement C = le courant passe dans le circuit. Soit les événements E_j = la j -ième composante fonctionne. Par hypothèse, on a $\mathbb{P}(E_j) = p$.

On peut regrouper les composantes en modules comme sur la figure suivante à gauche



On obtient le circuit à droite. Le circuit à droite se calcule comme suit : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}[E_1 \cap (M_1 \cup M_2)] = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(M_1 \cup M_2)$ que l'on peut simplifier en

$$\mathbb{P}(C) = p(1 - \mathbb{P}(M_1^c)\mathbb{P}(M_2^c)).$$

Pour M_1 , on a simplement $M_1^c = E_1^c \cap E_2^c$ et donc $\mathbb{P}(M_1^c) = (1-p)^2$.

Pour M_2 , on a $M_2 = (E_4 \cup E_5) \cap E_6$, donc $\mathbb{P}(M_2) = p\mathbb{P}(E_4 \cup E_5) = p(1 - (1-p)^2)$. Il suit que

$$\mathbb{P}(M_2^c) = 1 - p + p(1-p)^2 = (1-p)(1 + p(1-p)).$$

Enfin, on combine et on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= p(1 - \mathbb{P}(M_1^c)\mathbb{P}(M_2^c)) = p\left[1 - (1-p)^2 \times (1-p)(1 + p(1-p))\right] \\ &= p - p(1-p)^3(1 + p(1-p)).\end{aligned}$$

Exercice 6. On considère des paniers placés en file et numérotés $1, 2, 3, \dots$. Le panier numéro n contient une boule rouge et n boules blanches. On tire une boule à partir de chaque panier. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois la boule rouge.

Solution. Le tirage de chaque panier est indépendant des autres. Soit $A =$ tirer au moins une boule rouge parmi tous les paniers. Soit $E_n =$ tirer une boule blanche au n -ième panier.

Alors $A^c = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots$. Comme ils sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2) \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}.$$

Si on s'arrête au n -ième panier, on a

$$\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, si on laisse $n \rightarrow \infty$, on obtient 0. Il suit que $\mathbb{P}(A^c) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction de masse est

$$p_X(x) = \begin{cases} 2/10, & \text{si } x = 1; \\ 4/10, & \text{si } x = 4; \\ 1/10, & \text{si } x = 7; \\ 3/10, & \text{si } x = 10; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Vérifier que p_X est bien une fonction de masse.
- Calculer $\mathbb{P}(X \leq 8)$.

Exercice 8. Un arbre (graphe sans cycle connexe) possède n sommets. On part de la racine et on effectue une recherche en largeur. Soit $Y =$ nombre de sommets visités pour trouver l'élément recherché.

- a) Calculer la fonction de masse p_Y de Y .
 b) Calculer la probabilité de trouver l'élément recherché en k sommets ou moins.

Solution. a) On peut résoudre le problème de plusieurs façons. Puisqu'on effectue la recherche toujours de la même façon, on peut s'imaginer que les sommets sont numérotés de 1 à n et placés en ligne; lorsque l'on fait notre recherche, on part du début de la ligne et on la suit jusqu'à trouver l'élément.

Solution 1. $p_Y(k)$ signifie que l'élément recherché est exactement à la position k . Cela se produit avec probabilité $\frac{1}{n}$. Ainsi la fonction de masse est constante $\frac{1}{n}$ sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et 0 ailleurs.

Solution 2. On considère l'événement $E_i =$ le i -ième sommet est l'élément recherché. On a $p_Y(1) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{n}$ et pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \mathbb{P}(E_1^c \cap \dots \cap E_{k-1}^c \cap E_k) \\ &= \mathbb{P}(E_1^c) \mathbb{P}(E_2^c | E_1^c) \dots \mathbb{P}(E_{k-1}^c | E_1^c \cap \dots \cap E_{k-2}^c) \mathbb{P}(E_k | E_1^c \cap \dots \cap E_{k-1}^c) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

b) On veut calculer $\mathbb{P}(Y \leq k)$, qui est simplement $\mathbb{P}(Y \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

Exercice 9. Combien faut-il lancer de dés à six faces pour que la probabilité d'obtenir exactement un quatre soit maximale?

Solution. On lance n dés. Soit $X =$ nombre de dés qui donnent 4. C'est une binomiale de paramètre $(n, 1/6)$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathbb{P}(X = 1)$ est maximale.

On pose

$$a_n = \mathbb{P}(X = 1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

On voit que

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq a_n &\iff \frac{n+1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq \frac{n}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &\iff \frac{5}{6} \geq \frac{n}{n+1} \\ &\iff 5 \geq n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (a_n) est croissante pour $1 \leq n \leq 5$ et (a_n) est décroissante pour $5 \leq n$. Le maximum est atteint en $n = 5$ (et $n = 6$, car $a_5 = a_6$). C'est donc en lançant 5 dés ou 6 dés qu'on aura la meilleure chance d'obtenir un seul quatre.

Numériquement, on trouve

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0.13\overline{8} & a_2 = 0.23\overline{148} & a_3 = 0.2893\overline{518} \\ a_4 \approx 0.3215 & a_5 \approx 0.335 & a_6 \approx 0.335 \\ a_7 \approx 0.326 & a_8 \approx 0.310 & a_9 \approx 0.291 \end{array}$$

Exercice 10. Soit $X \sim \text{binom}(n, p)$. Montrer que la fonction de masse p_X vérifie bien les conditions d'une fonction de masse.

Exercice 11. Soit $X \sim \text{geo}(p)$.

- a) Montrer que la fonction de masse p_X vérifie bien les conditions d'une fonction de masse.
- b) Montrer que $\mathbb{P}(X \geq n) = (1 - p)^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Formules utiles : $\frac{1-r^n}{1-r} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k$ et $\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

Solution. b) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq n) &= 1 - \mathbb{P}(X < n) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_X(k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} p \\ &= 1 - p \sum_{\ell=0}^{n-2} (1-p)^\ell && (\ell = k-1) \\ &= 1 - p \frac{1 - (1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)} \\ &= 1 - (1 - (1-p)^{n-1}) = (1-p)^{n-1}. \end{aligned}$$

Exercice 12. On lance une pièce de monnaie n fois. Elle a une probabilité p de tomber sur pile et $1 - p$ de tomber sur face. On pose $X =$ nombre de piles.

- a) Quelle est la distribution de X ? (Autrement dit, quelle loi de probabilité X suit-elle.)
- b) Pour chaque pile obtenu, on lance un dé. Il a une probabilité q de tomber sur 3 et une probabilité $1 - q$ de tomber sur une autre face. On pose $Y =$ nombre de 3 obtenus. Si $X = k$, quelle est la distribution de Y ?

c) Calculer la fonction de masse de Y dans le cas façon générale.

d)† Vérifier que la fonction trouvée au c) est bien une fonction de masse.

Solution. a) On a $X \sim \text{binom}(n, p)$.

b) Si $X = k$, alors on lance k dés, donc $Y \sim \text{binom}(k, q)$.

c) On utilise la loi des probabilités totales. Remarquons qu'il est impossible que $Y < X$, car il faudrait lancer plus de dés qu'on a obtenu de pile. On a

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{m=k}^n \mathbb{P}(X = m) \mathbb{P}(Y = k | X = m) \\ &= \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \mathbb{P}(Y = k | X = m) \end{aligned}$$

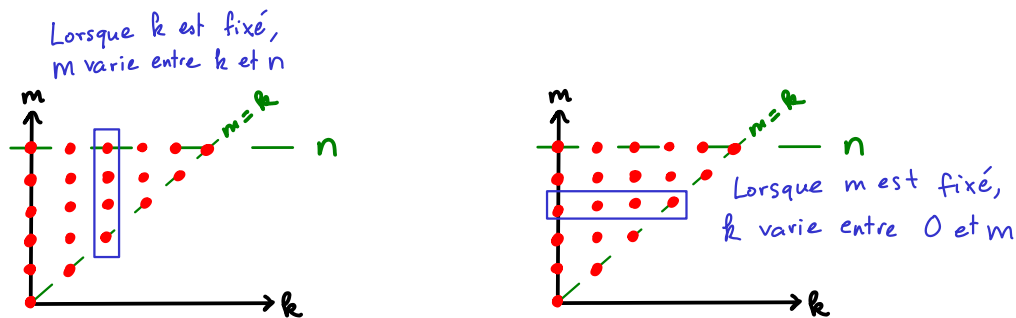
Pour continuer, remarquons que, sachant que $X = m$, alors $Y \sim \text{binom}(m, q)$. Autrement dit, $\mathbb{P}(Y = k | X = m)$ se calcule avec la densité d'une binomiale de paramètre (m, q) . On poursuit avec

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \mathbb{P}(Y = k | X = m) \\ &= \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}. \end{aligned}$$

d) On veut montrer que $\sum_{k=0}^n p_Y(k) = 1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n p_Y(k) &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{m=k}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \times (q + (1-q))^m \quad (\text{Formule du binôme}) \\ &= (p + (1-p))^n. \end{aligned}$$

Échanger les sommes à la ligne (*) ne pose pas de problème de convergence (ce sont des sommes finies, donc il n'y a pas de limites). Mais il vaut la peine d'expliquer comment on a obtenu les bornes des sommes. L'explication se trouve sur le dessin suivant :



On voit sur la figure que les sommes $\sum_{k=0}^n \sum_{m=k}^n$ et $\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m$ parcourent les mêmes points $(m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui vérifient $0 \leq k \leq m \leq n$.