

# Probabilités et statistique

## Série 2

Équiprobabilité et permutations (solutionnaire)

### 1. Équiprobabilités

**Exercice 1.** On lance un dé à quatre faces et un dé à 6 faces, tout deux équilibrés.

- Quelle est la probabilité que la somme donne 6 ?
- Quelle est la probabilité d'avoir au moins un 5 ?
- Quelle est la probabilité que le maximum des deux dés soit supérieur ou égal à 3 ?

**Exercice 2.** Vous et votre ami tirez à pile ou face trois fois. Vous gagne s'il y a plus de pile, votre ami gagne s'il y a plus de face et c'est nul sinon. Calculez votre probabilité de gagner.

**Exercice 3.** On choisit une chaîne de bit de longueur 5 au hasard.

- Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 1 que de 0 ?
- Quelle est la probabilité que la somme des chiffres qui constituent la chaîne soit plus grande ou égale à 3 ? (P.ex. pour 10110, la somme est  $1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 3$ .)
- Expliquez pourquoi vous obtenez la même probabilité au a) et au b).

**Solution.** a) Il est un peu plus rapide d'utiliser le complément. Il y a plus de 1 si et seulement si il y a trois 1 ou plus. Soit  $A =$  il y a trois 1 ou plus. Alors, le complément est  $A^c =$  il y a deux 1 ou moins.

Soit  $B_j =$  il y a  $j$  1. Alors  $B_0 = \{00000\}$ ,  $B_1 = \{00001, 00010, 00100, 01000, 10000\}$  et

$$B_2 = \{11000, 10100, 10010, 10001, 01100, 01010, 01001, 00110, 00101, 00011\}.$$

On a  $\#B_0 = 1$ ,  $\#B_1 = 5$  et  $\#B_2 = 10$ . On a donc

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = \frac{1 + 5 + 10}{2^5} = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, on a  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = \frac{1}{2}$ .

b) La somme des chiffres de la chaîne donne le nombre de 1 dans la chaîne, donc la somme est supérieure ou égale à 3 si et seulement si il y a au moins trois 1 dans la chaîne. On a calculé cela au a), donc la réponse est  $\frac{1}{2}$ .

c) Dans les deux cas, le problème revient à calculer la probabilité qu'il y ait trois 1 ou plus dans la chaîne.

**Exercice 4.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, où  $\#\Omega = n \geq 1$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Si  $\mathbb{P}$  est équiprobable, montrer que  $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{1}{n}$  pour tout  $x \in \Omega$ .

**Solution.** Soit  $x_1, \dots, x_n$  les éléments de  $\Omega$ . D'une part  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et d'autre part

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{x_k\}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{x_1\}) = n\mathbb{P}(\{x_1\}).$$

Comme  $n\mathbb{P}(\{x_1\}) = 1$ , on a  $\mathbb{P}(\{x_1\}) = \frac{1}{n}$ .

**Exercice 5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace mesuré, où  $\Omega = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbb{P}(a) = 4\mathbb{P}(b) = 2\mathbb{P}(c)$ .

- Déterminer la valeur de  $\mathbb{P}(a)$ ,  $\mathbb{P}(b)$  et  $\mathbb{P}(c)$ .
- Calculer  $\mathbb{P}(\{a, b\})$ .

**Exercice 6.** Soit  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$  des nombres tels que  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ . Soit  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ . On pose  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbb{P}(x_j) := p_j$ . Expliquer comment calculer  $\mathbb{P}(A)$  pour tout événement  $A \in \mathcal{F}$ .

**Solution.** Un événement  $A$  aura la forme  $A = \{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$  pour certains éléments  $x_{n_j} \in \Omega$ . On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{x_{n_1}\} \cup \dots \cup \{x_{n_k}\}) = \mathbb{P}(x_{n_1}) + \dots + \mathbb{P}(x_{n_k}) = p_{n_1} + \dots + p_{n_k}.$$

## 2. Complément et formule d'inclusion-exclusion

**Exercice 7.** Faire un dessin avec des diagrammes de Venn pour représenter visuellement la formule d'inclusion-exclusion pour trois événements  $A, B, C$  :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

**Exercice 8.** Une urne contient 5 billes rouges et 7 billes vertes. On tire 3 billes avec remise.

- Quelle est la probabilité de tirer au moins une bille rouge ?
- Quelle est la probabilité de tirer au moins deux billes rouges ?

**Solution.** a) Soit  $A =$  tirer au moins une bille rouge. Le complément est  $A^c =$  tirer aucune bille rouge, donc  $A^c$  se réalise ssi on tire 3 billes vertes.

Si on numérote les billes rouges de 1 à 5 et les billes vertes, de 6 à 12, on peut voir le tirage comme des vecteurs  $(x_1, x_2, x_3)$  où chaque  $1 \leq x_j \leq 12$ . Ainsi,  $A^c$  se réalise si on tire un vecteur  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $6 \leq x_j \leq 12$  (ce qui correspond à être vert). Il y a donc  $7 \times 7 \times 7$

éléments dans  $A^c$ . Il y a  $12 \times 12 \times 12$  éléments au total, donc

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{7^3}{12^3} = \frac{343}{1728}.$$

La réponse est  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = \frac{1385}{1728} \approx 0,8015$ .

b) Soit  $B$  = tirer au moins deux billes rouges. Le complément est  $B^c$  = tirer au plus 1 bille rouge. On pose  $C$  = tirer exactement 1 bille rouge. Au a), on a  $A^c$  = tirer aucune bille rouge. On a  $B^c = C \cup A^c$  et  $C$  et  $A^c$  sont mutuellement exclusifs, donc  $\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A^c)$ .

On a déjà calculer  $\mathbb{P}(A^c)$ , donc il suffit de calculer  $\mathbb{P}(C)$ . Si on pige la bille rouge en premier et ensuite deux billes vertes, on obtient un vecteur  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $1 \leq x_1 \leq 5$  et  $6 \leq x_j \leq 12$  pour  $j \in \{2, 3\}$ . Il y a  $5 \times 7 \times 7$  tels vecteurs. On répète le même raisonnement si on pige la bille rouge en 2e et si on la pige en 3e, ce qui donne  $7 \times 5 \times 7$  et  $7 \times 7 \times 5$  éléments respectivement. Il y a donc  $3 \times 7 \times 7 \times 5 = 735$  façons de piger exactement une bille rouge, et donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{735}{1728}.$$

Enfin, on trouve

$$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A^c) = \frac{735 + 343}{1728} = \frac{1078}{1728}$$

et donc

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = \frac{1728 - 1078}{1728} = \frac{650}{1728} \approx 0,376$$

**Exercice 9.** On joue à pile et face. Combien faut-il faire de lancers pour que la probabilité d'obtenir pile soit supérieure ou égale à 95% ?

**Exercice 10.** On choisit au hasard une chaîne de bits de longueur  $n$ . Quelle est la probabilité que la chaîne contiennent au moins un 1 ?

**Solution.** Soit l'événement  $A$  = la chaîne contient au moins un 1. Alors le complément est  $A^c$  = la chaîne ne contient aucun un.

La seule chaîne qui ne contient aucun 1 est la chaîne de 0, ainsi  $A^c = \{00 \cdots 0\}$ . Comme il y a  $2^n$  chaînes, on a

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{1}{2^n}.$$

On a donc  $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$ .

**Exercice 11.** On possède cinq cartes qui contiennent chacune deux numéros :

- Carte un : 1 et 5

- Carte deux : 1 et 4
- Carte trois : 2 et 5
- Carte quatre : 2 et 3
- Carte cinq : 1 et 3

On tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité qu'il y ait un 1 ou un 5 sur la carte ?

### 3. Permutations

**Exercice 12.** Vous avez en main 3 cartes de trèfles, 5 de carreau, 4 de pique et 7 de coeur. Vous les placez dans un ordre au hasard dans votre main.

- a) Quelle la probabilité que les cartes soient regroupées par sorte ?
- b) Quelle la probabilité que les cartes soient regroupées par couleur (rouge, noire) ?

**Solution.** a) Il y a  $3!$  façon de placer les cartes de trèfles,  $5!$  façons de placer les cartes de carreau, etc. Ensuite, il y a  $4!$  façons de placer les sortes, donc il y a  $3!5!4!7!4!$  façons de regrouper les sortes ensembles. Comme il y a 19 cartes, il y a  $19!$  façons de placer les cartes. La probabilité est donc  $\frac{3!5!4!7!4!}{19!}$ .

b)  $\frac{7!12!2!}{19!}$

**Exercice 13.** Combien de permutations différentes peut-on former avec les lettres des mots suivants ?

- a) P R O B A B I L I T É
- b) I N F O R M A T I Q U E

**Solution.** a) Faisons la liste des lettres présentes : il y a un A, É, L, O, P, R, T et deux B, I. Il y a 11 lettres au total. Si toutes les lettres étaient distinctes, on aurait  $11!$  permutations. Comme on peut permuter les lettres qui se répètent, on divise pour obtenir  $\frac{11!}{2!2!}$ .

b) Même démarche. Réponse :  $\frac{12!}{2!}$

**Exercice 14.** Une reine, trois pions, deux cavaliers et deux tours sont placés au hasard en ligne sur un jeu d'échec.

- a) Combien y a-t-il de configurations ?
- b) Quelle est la probabilité que la reine se trouve à l'une des extrémités ?
- c) Quelle est la probabilité que les trois pions soient côte-à-côte ?

**Solution.** a) Il y a 8 pièces au total. Si les pièces étaient distinctes, on aurait  $8!$  permutations. On doit diviser pour les pièces qui se répètent, donc on a  $\frac{8!}{3!2!2!} = 1680$ .

b) On place la reine l'extrémité droite. Il reste 7 pièces à placer, donc il y a  $\frac{7!}{3!2!2!}$  configura-

tions, où on divise pour tenir compte des pièces qui se répètent.

Maintenant, on place la reine à l'extrémité gauche. On trouve  $\frac{7!}{3!2!2!}$  nouvelles configurations. Au total, il y a donc  $2 \times \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7!}{3!2!} = 420$ .

La probabilité est donc  $\frac{420}{1680}$ .

c) Supposons que les trois pions sont dans les trois cases les plus à droite. Il reste 5 pièces à placer dans les cinq autres cases. Il y a  $\frac{5!}{2!2!} = 30$  façons de placer les autres pièces, en tenant compte des pièces qui se répètent.

On multiplie ce nombre par le nombre de façons de placer les trois pions côte-à-côte sur les huit cases. Si on commence sur les trois cases les plus à droite, à chaque fois que l'on tasse les pions d'une case à gauche, on trouve une nouvelle configuration. On peut faire cela cinq fois, donc il y a 6 façons de placer les trois pions côte-à-côte.

La probabilité est donc  $\frac{6 \times 30}{1680} = \frac{3}{28}$ .

**Exercice 15.** Soit  $A = \{1, 2, \dots, k\}$  et  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ , où  $n, k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n$ . Quelle est la probabilité de choisir une fonction  $f: A \rightarrow B$  injective parmi l'ensemble de toutes les fonctions possibles  $g: A \rightarrow B$ , en supposant l'équiprobabilité ?

**Solution.** On a vu en classe qu'une fonction injective correspond à une permutation de  $k$  parmi  $n$ . Ce nombre se compte avec  $P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ . Cela est suffisant pour la solution, mais on peut revoir la démarche.

Lorsqu'on définit  $f$ , on doit choisir une valeur pour  $f(1)$ . Il y a  $n$  choix. Ensuite, on définit  $f(2)$ ; il faut choisir une valeur différente de  $f(1)$  pour que  $f$  soit injective, donc il y a  $n-1$  choix. On continue ainsi pour  $f(3), \dots, f(k)$ . On voit qu'on a  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$  façons de construire  $f$  injective. Ce nombre vaut  $P_{n,k}$ .

Ensuite, on doit compter le nombre de fonction  $g: A \rightarrow B$ . Le raisonnement est similaire, mais il n'y a plus la contrainte que  $g$  doit être injective. Ainsi, on choisit une valeur pour  $g(1)$ , il y a  $n$  choix; on choisit une valeur pour  $g(2)$ , il y a  $n$  choix; et ainsi de suite. Il y a donc  $n^k$  fonctions possibles.

La probabilité de choisir au hasard est donc  $\frac{n!}{(n-k)!n^k}$ .