

# Probabilités et statistique

## Série 2

### Équiprobabilité et permutations

#### 1. Équiprobabilités

**Exercice 1.** On lance un dé à quatre faces et un dé à 6 faces, tout deux équilibrés.

- Quelle est la probabilité que la somme donne 6 ?
- Quelle est la probabilité d'avoir au moins un 5 ?
- Quelle est la probabilité que le maximum des deux dés soit supérieur ou égal à 3 ?

**Exercice 2.** Vous et votre ami tirez à pile ou face trois fois. Vous gagne s'il y a plus de pile, votre ami gagne s'il y a plus de face et c'est nul sinon. Calculez votre probabilité de gagner.

**Exercice 3.** On choisit une chaîne de bit de longueur 5 au hasard.

- Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 1 que de 0 ?
- Quelle est la probabilité que la somme des chiffres qui constituent la chaîne soit plus grande ou égale à 3 ? (P.ex. pour 10110, la somme est  $1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 3$ .)
- Expliquez pourquoi vous obtenez la même probabilité au a) et au b).

**Exercice 4.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, où  $\#\Omega = n \geq 1$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Si  $\mathbb{P}$  est équiprobable, montrer que  $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{1}{n}$  pour tout  $x \in \Omega$ .

**Exercice 5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace mesuré, où  $\Omega = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(F)$  et  $\mathbb{P}(a) = 4\mathbb{P}(b) = 2\mathbb{P}(c)$ .

- Déterminer la valeur de  $\mathbb{P}(a)$ ,  $\mathbb{P}(b)$  et  $\mathbb{P}(c)$ .
- Calculer  $\mathbb{P}(\{a, b\})$ .

**Exercice 6.** Soit  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$  des nombres tels que  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ . Soit  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ . On pose  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbb{P}(x_j) := p_j$ . Expliquer comment calculer  $\mathbb{P}(A)$  pour tout événement  $A \in \mathcal{F}$ .

#### 2. Complément et formule d'inclusion-exclusion

**Exercice 7.** Faire un dessin avec des diagrammes de Venn pour représenter visuellement la formule d'inclusion-exclusion pour trois événements  $A, B, C$  :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

**Exercice 8.** Un urne contient 5 billes rouges et 7 billes vertes. On tire 3 billes avec remise.

- a) Quelle est la probabilité de tirer au moins une bille rouge ?
- b) Quelle est la probabilité de tirer au moins deux billes rouges ?

**Exercice 9.** On joue à pile et face. Combien faut-il faire de lancers pour que la probabilité d'obtenir pile soit supérieure ou égale à 95% ?

**Exercice 10.** On choisit au hasard une chaîne de bits de longueur  $n$ . Quelle est la probabilité que la chaîne contiennent au moins un 1 ?

**Exercice 11.** On possède cinq cartes qui contiennent chacune deux numéros :

- Carte un : 1 et 5
- Carte deux : 1 et 4
- Carte trois : 2 et 5
- Carte quatre : 2 et 3
- Carte cinq : 1 et 3

On tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité qu'il y ait un 1 ou un 5 sur la carte ?

### 3. Permutations

**Exercice 12.** Vous avez en main 3 cartes de trèfles, 5 de carreau, 4 de pique et 7 de coeur. Vous les placez dans un ordre au hasard dans votre main.

- a) Quelle la probabilité que les cartes soient regroupées par sorte ?
- b) Quelle la probabilité que les cartes soient regroupées par couleur (rouge, noire) ?

**Exercice 13.** Combien de permutations différentes peut-on former avec les lettres des mots suivants ?

- a) P R O B A B I L I T É
- b) I N F O R M A T I Q U E

**Exercice 14.** Une reine, trois pions, deux cavaliers et deux tours sont placés au hasard en ligne sur un jeu d'échec.

- a) Combien y a-t-il de configurations ?
- b) Quelle est la probabilité que la reine se trouve à l'une des extrémités ?
- c) Quelle est la probabilité que les trois pions soient côte-à-côte ?

**Exercice 15.** Soit  $A = \{1, 2, \dots, k\}$  et  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ , où  $n, k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n$ . Quelle est la probabilité de choisir une fonction  $f: A \rightarrow B$  injective parmi l'ensemble de toutes les fonctions possibles  $g: A \rightarrow B$ , en supposant l'équiprobabilité ?