Probabilités et statistique

Série 11

Tests d'hypothèse (solutionnaire)

Exercice 1. Expliquer la différence entre une erreur de première espèce et une erreur de deuxième espèce.

Solution. Une erreur de première espèce correspond à rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle était vraie.

Une erreur de seconde espèce correspond à ne pas rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle était fausse.

Exercice 2. a) Que se passe-t-il si l'on choisit un seuil α de 100% ? Qu'est-ce que cela représente en terme d'erreur de premier espèce et d'erreur de deuxième espèce ?

b) Que se passe-t-il si l'on choisit un seuil α de 0% ? Qu'est-ce que cela représente en terme d'erreur de premier espèce et d'erreur de deuxième espèce ?

Solution. a) Si le seuil du test est à 100%, alors on rejette toujours l'hypothèse nulle, puisque l'on aura $p \leq \alpha$ à chaque fois. Dans ce cas, si H_0 est vraie, on commettra une erreur de première espèce 100% du temps. On ne fera jamais d'erreur de deuxième espèce.

b) Si le seuil du test est à 0%, alors on ne rejettera jamais l'hypothèse nulle, puisqu'on aura toujours $p > \alpha$. Dans ce cas, si H_0 fausse, on commettra une erreur de deuxième espèce 100% du temps.

Exercice 3. Pour un test d'hypothèse donné, on utilise une variable décisionnelle T_{stat}. Supposons qu'à partir d'un échantillon, on calcule un t_{stat} donné. Expliquer la différence entre $\mathbb{P}(T_{\text{stat}} \geq t_{\text{stat}} | H_0)$ et $\mathbb{P}(H_0 | T_{\text{stat}} \geq t_{\text{stat}})$.

Solution. La probabilité $\mathbb{P}(T_{\text{stat}} \geq t_{\text{stat}} | H_0)$ correspond à la probabilité d'observer t_{stat} ou quelque chose de plus extrême en supposant que H_0 est vraie. Si cette probabilité est très petite, on peut l'interpréter comme voulant dire qu'il est absurde de supposer que H_0 soit vraie (même si c'est possible que H_0 soit vraie en réalité).

La probabilité $\mathbb{P}(H_0 | T_{\text{stat}} \geq t_{\text{stat}})$ est la probabilité que H_0 soit vraie en ayant observé t_{stat} ou quelque chose de plus extrême. Il est rare qu'il soit possible de calculer cette probabilité en pratique.

C'est deux probabilités sont très différentes conceptuellement. De plus, même si on sait que, par exemple, $\mathbb{P}(T_{\text{stat}} \geq t_{\text{stat}} | H_0)$ est très petit, cela ne veut pas dire que $\mathbb{P}(H_0 | T_{\text{stat}} \geq t_{\text{stat}})$ est également très petite. Autrement dit, la valeur-*p n'est pas la probabilité que H_0 soit vraie*.

Exercice 4. Étant donné une hypothèse H_0, on pose

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}) \quad \text{et} \quad \beta = \mathbb{P}(\text{garder } H_0 | H_0 \text{ faux}).$$

a) Qu'est-ce que α ?

b) Qu'est-ce que β ?

c) On appelle $1-\beta$ la *puissance du test*. Expliquer ce que représente $1-\beta$ en terme de probabilité. Est-il souhaitable que $1-\beta$ soit grand ou petit ?

Solution. a) α est la probabilité de faire une erreur de première espèce.

b) β est la probabilité de faire une erreur de deuxième espèce.

c) On peut écrire $1-\beta = 1 - \mathbb{P}(\text{garder } H_0|H_0 \text{ faux}) = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0|H_0 \text{ faux})$. Rejeter H_0 lorsque H_0 est faux est le cas idéal, donc il est très important qu'un test statistique est une puissance élevée.

Exercice 5. On soupçonne qu'une pièce de monnaie est mal équilibré en faveur du pile. Soit p la probabilité de lancer un pile. On fait l'hypothèse

$$H_0 : p = \tfrac{1}{2}, \qquad H_1 : p > \tfrac{1}{2}.$$

a) On utilise la règle de décision raisonnable « on rejette H_0 si on obtient au moins 9 piles parmi 10 lancers. » Calculer la probabilité de faire une erreur de première espèce et la probabilité de faire une erreur de deuxième espèce.

b) On utilise la règle le décision raisonnable « on rejette H_0 s'il faut au moins 8 lancers pour obtenir son premier face. » Calculer la probabilité de faire une erreur de première espèce et la probabilité de faire une erreur de deuxième espèce.

c) Quelle règle de décision possède la plus petite erreur de premièr espèce ?

Exercice 6. Dans une classe de 35 étudiant·e·s, on observe qu'il y a 5 personnes gauchères et 30 personnes droitières. On prétend que 10% de la population est gauchère et 90%, droitière. La distribution des étudiant·e·s est-elle significativement différente de celle de la population générale ? Répondre à cette question avec un seuil de 5%, si possible. Déterminer également la valeur p.

Solution. On fait l'hypothèse nulle

$$H_0 : \text{la distribution des étudiants est de 10\% de gauchers et 90\% de droitiers.}$$

On a le tableau 1 de valeurs observés et le tableau 2 des valeurs attendues.

Gaucher	Droitier	Total
5	30	35
14,28%	85,71%	100%

Tableau 1. Valeurs observées

Gaucher	Droitier	Total
3,5	31,5	35
10%	90%	100%

Tableau 2. Valeurs attendues

On remplit le tableau de valeurs attendues comme suit : la deuxième ligne est les pourcentages données par l'hypothèse nulle; la première ligne est calculée comme suit : $35\times 10\% = 3.5$ et $35 \times 90\% = 31.5$.

On choisit la statistique de test

$$T_{\text{stat}} = \frac{(O_1 - A_1)^2}{A_1} + \frac{(O_2 - A_2)^2}{A_2},$$

où O_i est la i-ième valeur observée et A_i est la i-ième valeur attendue. Sous l'hypothèse nulle, T_{stat} suit une distribution du χ^2 avec 1 degré de liberté.

Calculons maintenant la réalisation de T_{stat} à partir des données. On a

$$\begin{aligned} t_{\text{stat}} &= \frac{(5-3.5)^2}{3.5} + \frac{(30-31.5)^2}{31.5} \\ &= 0.6428 + 0.0714 \\ &= 0.7142. \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la valeur p. On a

$$p = \mathbb{P}(T_{\text{stat}} > t_{\text{stat}}) = \mathbb{P}(T_{\text{stat}} > 0.7142) > 0.10.$$

En effet, 0.7142 est plus petit que les valeurs dans la première ligne du tableau, donc la valeur p est plus grande que 0.10. (La valeur exacte est $p = 0.398\ldots$.) Comme $p > 5\%$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle, donc on conclut que la distribution ne diffère pas significativement de celle de la population. (Attention, ici on comprend qu'on parle de significativité au sens statistique !)

Exercice 7. Les candidats A et B sont en lice lors d'une élection. On interroge 350 personnes représentatives de la population des électeurs et on obtient les résultats suivants :

Candidat A	Candidat B	Total
154	196	350
44%	56%	100%

Déterminer statistiquement, si possible, si les deux candidats obtiendront le même nombre de votes. Utiliser un seuil de 5%. Déterminer également la valeur p.

Solution. On fait l'hypothèse nulle

$$H_0 : \text{il y autant de vote pour le candidat A que le candidat B.}$$

On a le tableau 1 de valeurs observés et le tableau 2 des valeurs attendues.

Candidat A	Candidat B	Total
154	196	350
44%	56%	100%

Tableau 1. Valeurs observées

Candidat A	Candidat B	Total
175	175	350
50%	50%	100%

Tableau 2. Valeurs attendues

On remplit le tableau de valeurs attendues comme suit : la deuxième ligne est les pourcentages données par l'hypothèse nulle; la première ligne est calculée par $350 \times 50\% = 175$ et $350 \times 50\% = 175$.

On choisit la statistique de test

$$T_{\text{stat}} = \frac{(O_1 - A_1)^2}{A_1} + \frac{(O_2 - A_2)^2}{A_2},$$

où O_i est la i-ième valeur observée et A_i est la i-ième valeur attendue. Sous l'hypothèse nulle, T_{stat} suit une distribution du χ^2 avec 1 degré de liberté.

Calculons maintenant la réalisation de T_{stat} à partir des données. On a

$$\begin{aligned} t_{\text{stat}} &= \frac{(154 - 175)^2}{175} + \frac{(196 - 175)^2}{175} \\ &= 2.5200 + 2.5200 \\ &= 5.0400. \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la valeur p. On a

$$p = \mathbb{P}(T_{\text{stat}} > t_{\text{stat}}) = \mathbb{P}(T_{\text{stat}} > 5.04) \approx 0.025$$

En effet, 5.04 se trouve entre les valeurs 5.4119 et 4.7093 de la table, donc on prend une valeur à peu prendre entre 0.02 et 0.03. (La valeur exacte est $p = 0.0247\ldots$.) Comme $p < 5\%$, on rejette l'hypothèse nulle. On a donc montré que les votes ne seront pas divisés de façon égale.

Exercice 8. Pour l'hypothèse

$$H_0 : \mu = 14 \qquad H_1 : \mu \neq 14,$$

rejette-t-on l'hypothèse nulle avec un seuil de $\alpha = 1\%$? On observe les données suivantes

$$12 \qquad 20 \qquad 17 \qquad 19.$$

et on suppose que les données sont normalement distribuées.

Exercice 9. On suppose que la longueur d'un éperlan moyenne est normalement distribuée. On obtient les données suivantes (en cm)

$$\begin{matrix} 15 & 5 & 16 & 8 & 12 \\ 11 & 30 & 15 & 18 & 6 \end{matrix}.$$

Peut-on rejetter l'hypothèse nulle suivante

$$H_0 : \mu = 13 \qquad H_1 : \mu \neq 13,$$

avec un seuil $\alpha = 2{,}5\%$?

Exercice 10. On estime que la durée de vie d'une certaine composante électronique suit approximativement une loi normale $N(\mu, 2\text{années}^2)$, où μ est en années. On fait l'hypothèse

$$H_0 : \mu = 5 \qquad H_1 : \mu \neq 5.$$

On a observé les données suivantes (en années)

8,5	6	7	5,5	9
8	7,5	6	10	4

Peut-on conclure que $\mu > 5$ avec un seuil de 5% ?