distributions continues particulières

Par Élise Davignon

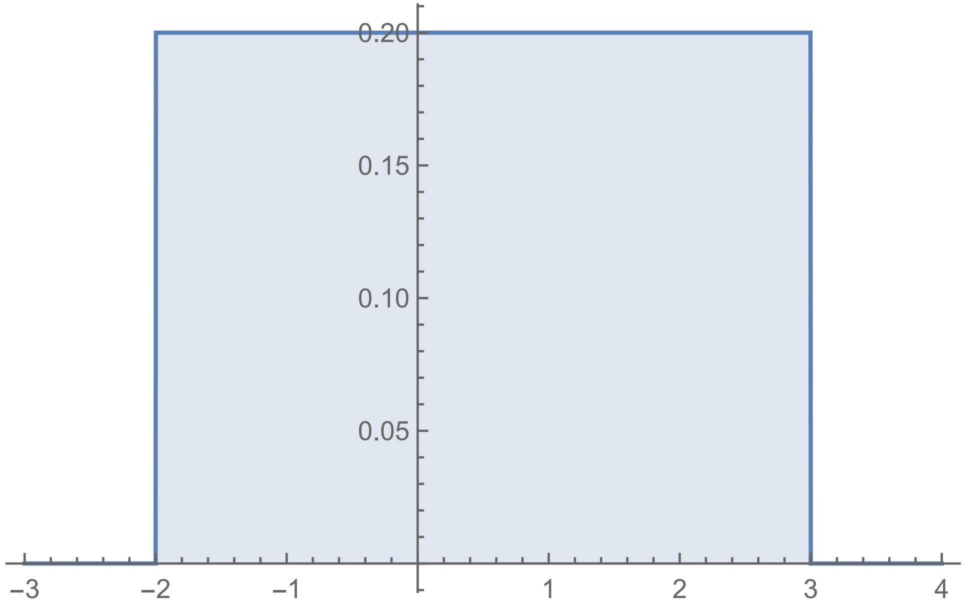
MAT 1978
Hiver 2021

la loi uniforme

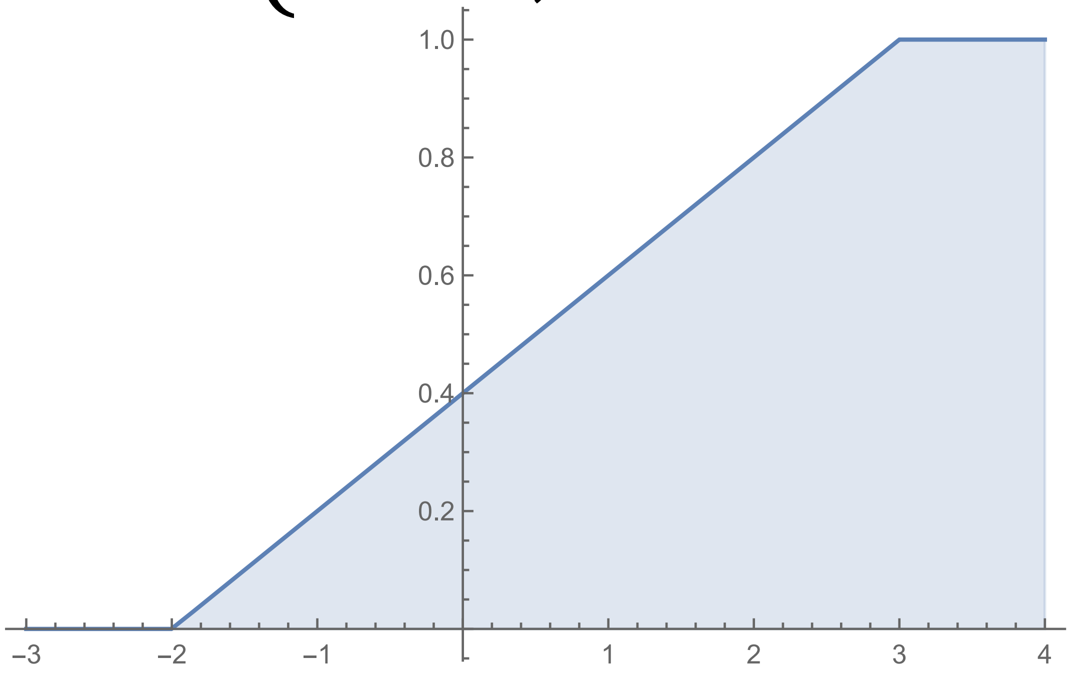
Paramètres : a, b
Avec $a < b$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbf{1}_{(a,b)}(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Support : (a, b)



exemple

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire uniforme.

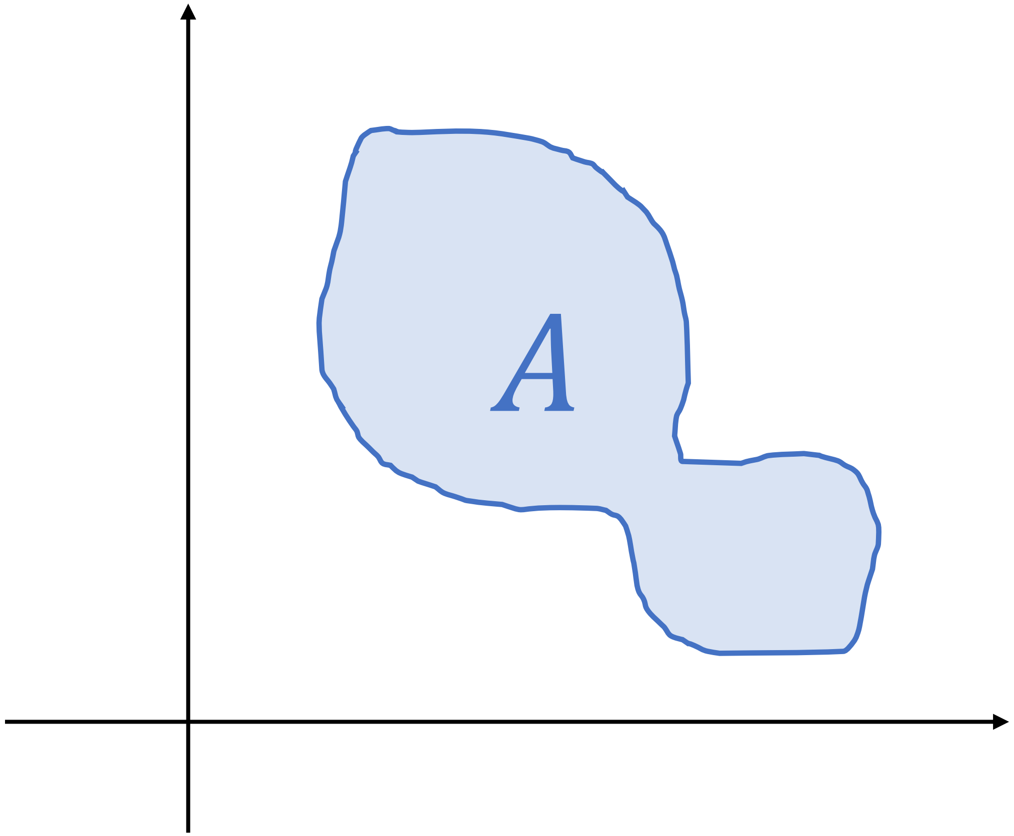
la loi uniforme

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)}{12}$$

la loi uniforme multivariée

sur une région A du plan



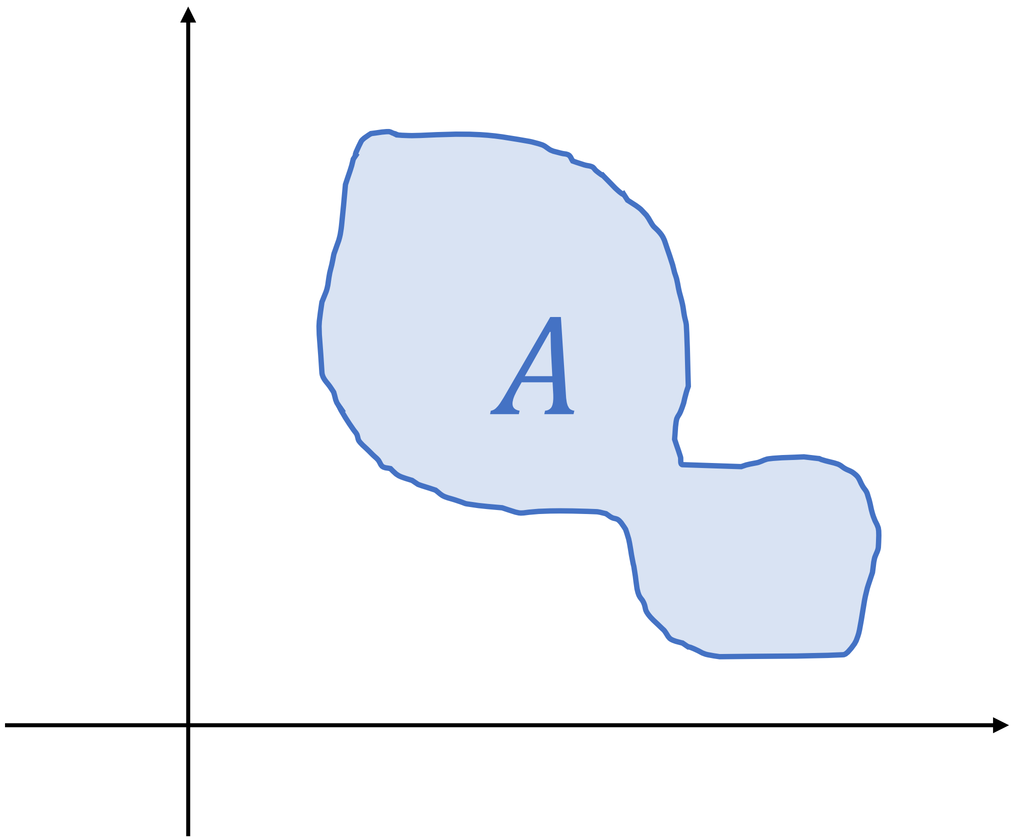
Support : A

$$f(x, y) = c \cdot 1_A(x)$$

?

la loi uniforme multivariée

sur une région A du plan

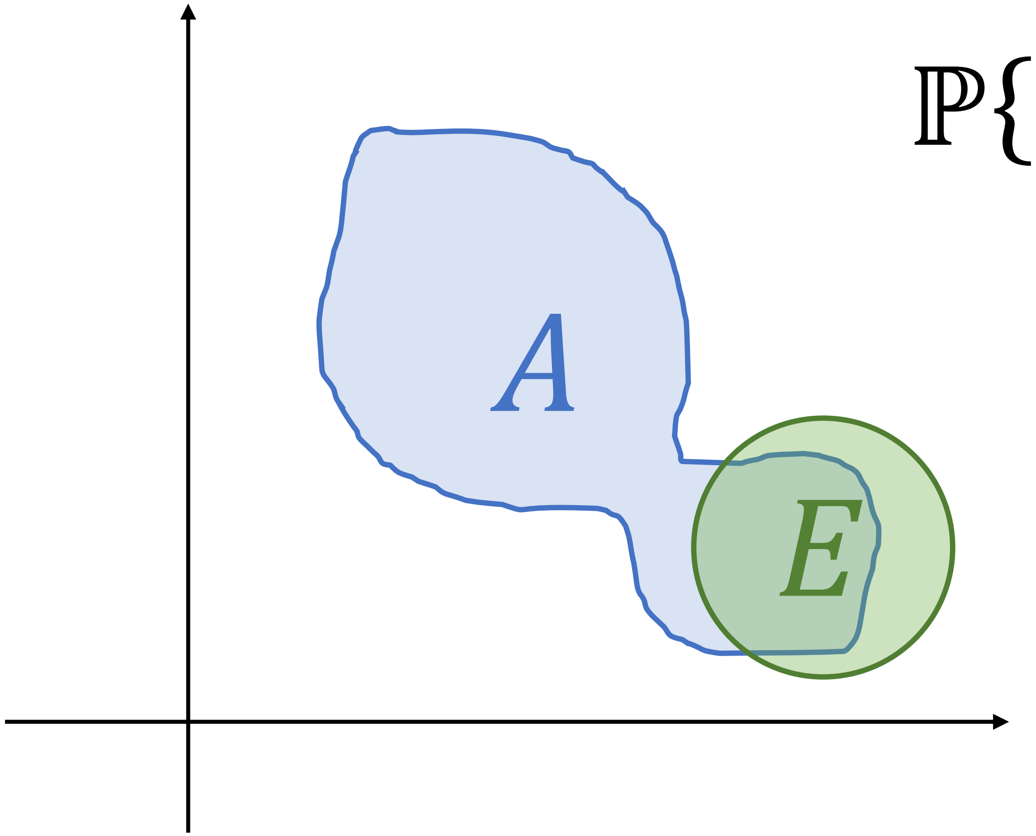


$$f(x,y) = c \cdot 1_A(x)$$

$$\frac{1}{\text{Aire }(A)}$$

la loi uniforme multivariée

sur une région A du plan



$$\mathbb{P}\{(X,Y) \in E\} = \frac{\text{Aire}(E \cap A)}{\text{Aire}(A)}$$

rappel que

$$\text{Aire }(R) = \iint_R dx\, dy$$

exemple

Le vecteur aléatoire (X, Y) est uniforme sur le disque de rayon 1 centré à l'origine.

(a) Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

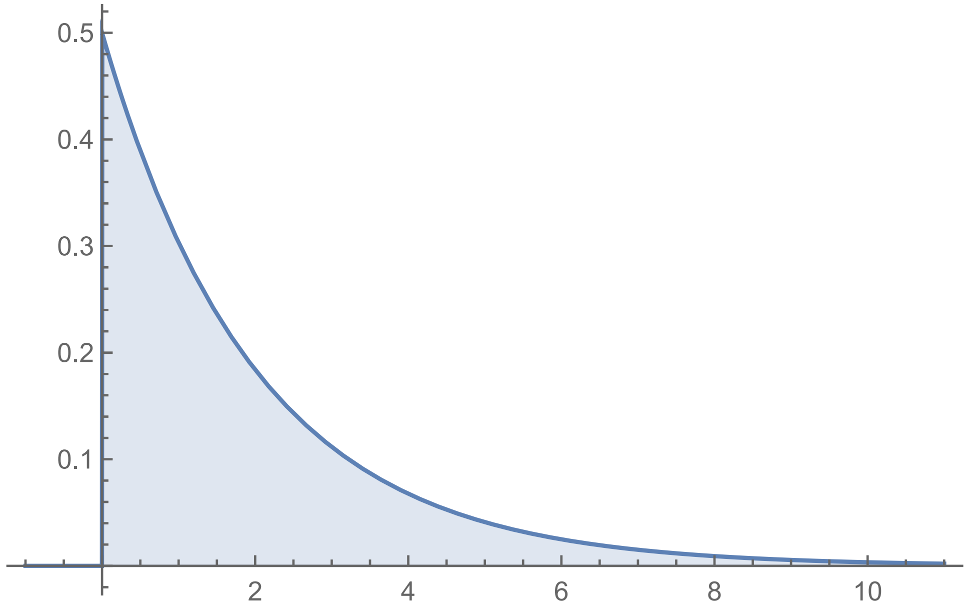
(b) Supposons que (X, Y) est uniforme sur une région A. À quelle condition (sur A) a-t-on que X et Y sont indépendantes ?

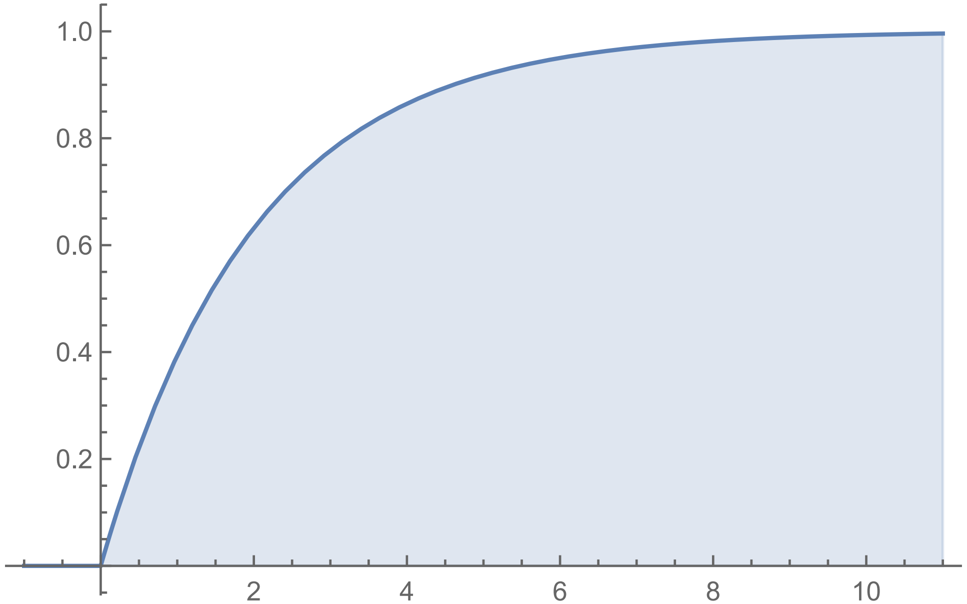
la loi exponentielle

Paramètre : $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$





Support : $(0, \infty)$

exemple

Calculer l’espérance et la variance de la distribution exponentielle.

exemple

Soit X le temps d'attente pour l'arrivée de l'autobus. On estime que c'est une variable aléatoire exponentielle avec une moyenne de 5 minutes.

(a) Quel est le paramètre λ.

(b) Quelle est la probabilité que l'autobus ne soit pas encore arrivé après 5 minutes ? Après s minutes ?

(c) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas arrivé après $s + t$ minutes ?

(d) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas encore arrivé après $s + t$ minutes sachant qu'il n'était pas arrivé après s minutes ?

géométrique

$\mathbb{P}\{$ Échec Échec Échec Échec Échec Échec Succès $|$ Échec Échec $\}$

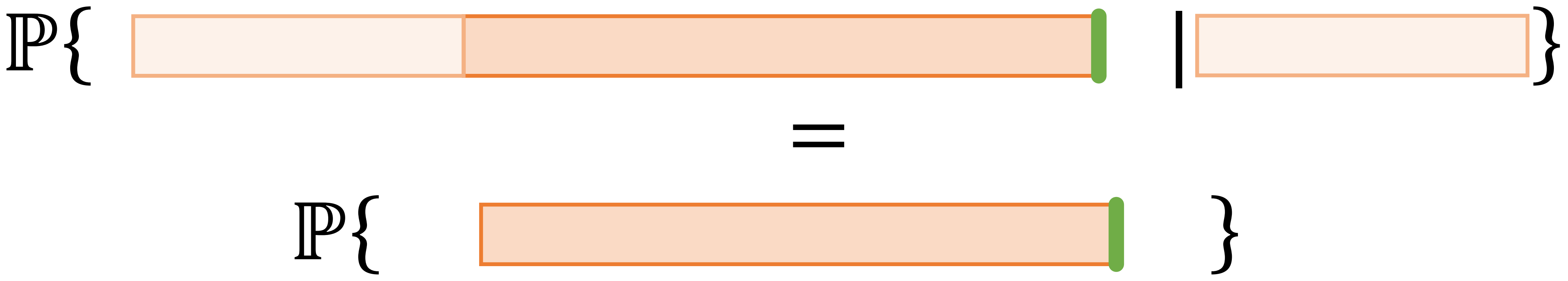
$=$

$\mathbb{P}\{$ Échec Échec Échec Échec Succès $\}$

Absence de mémoire : Vu que les tentatives sont indépendantes, on ne peut pas déduire d'informations sur le futur même si on a des infos sur le passé.

$$\mathbb{P}\{X > t + s \mid X > s\} = \mathbb{P}\{X > t\}$$

la loi exponentielle



Absence de mémoire : La variable exponentielle est un peu la « géométrique » des variables continues.

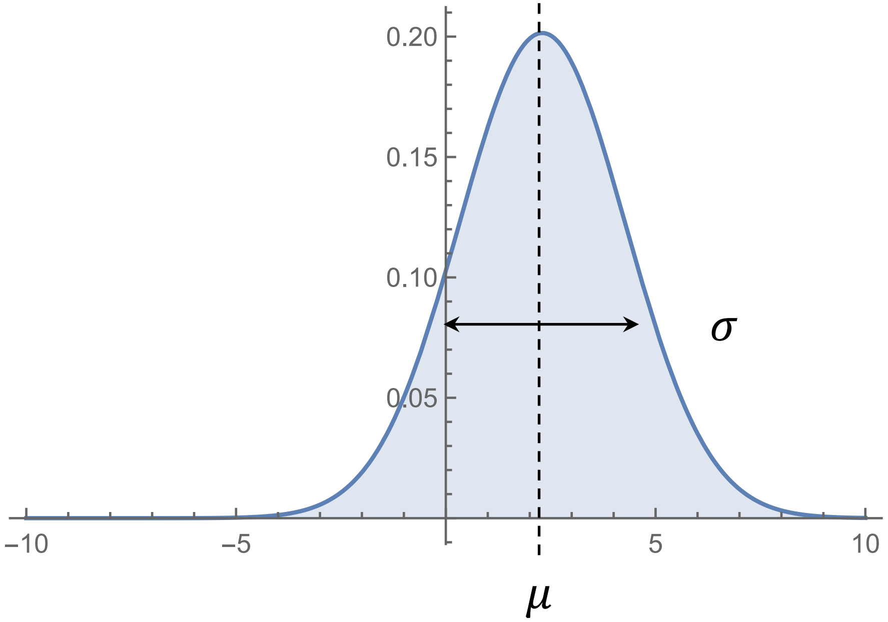
$$\mathbb{P}\{X > t + s \,|X > s\} = \mathbb{P}\{X > t\}$$

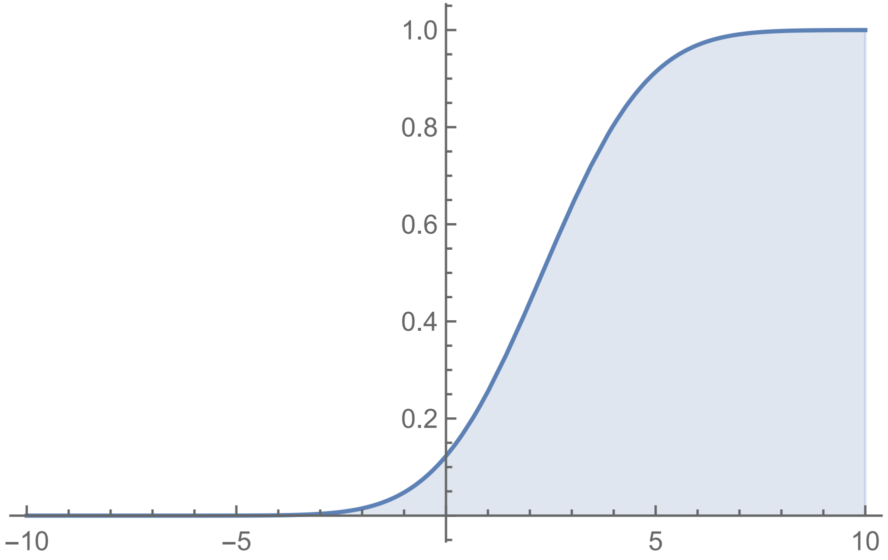
la loi normale

Paramètre : $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$



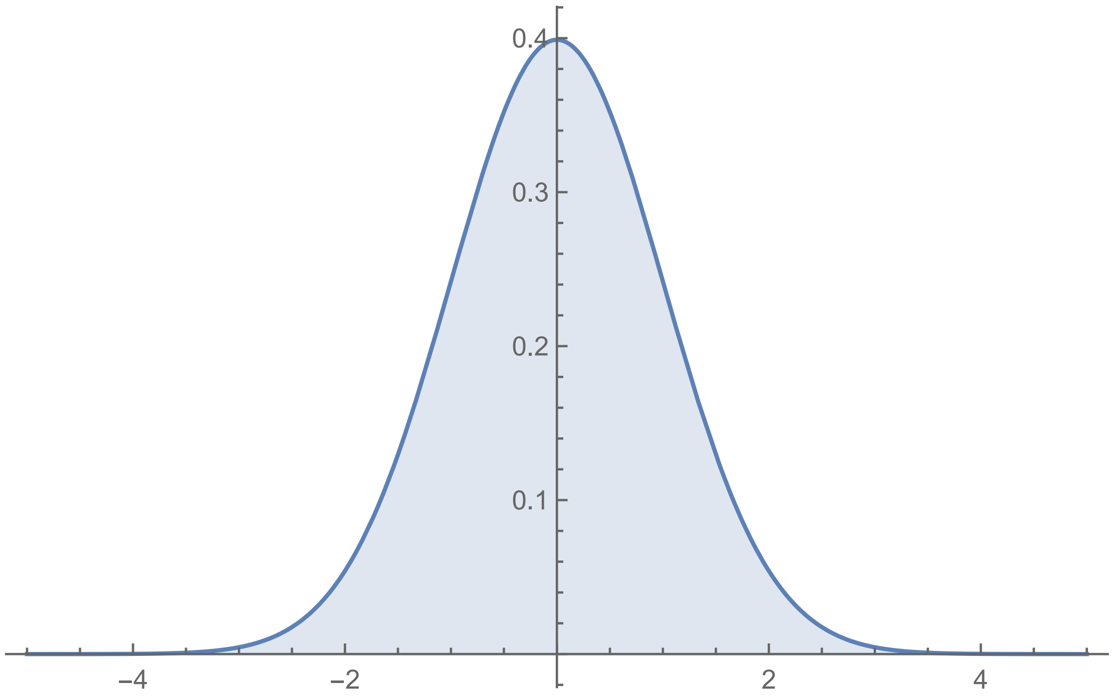


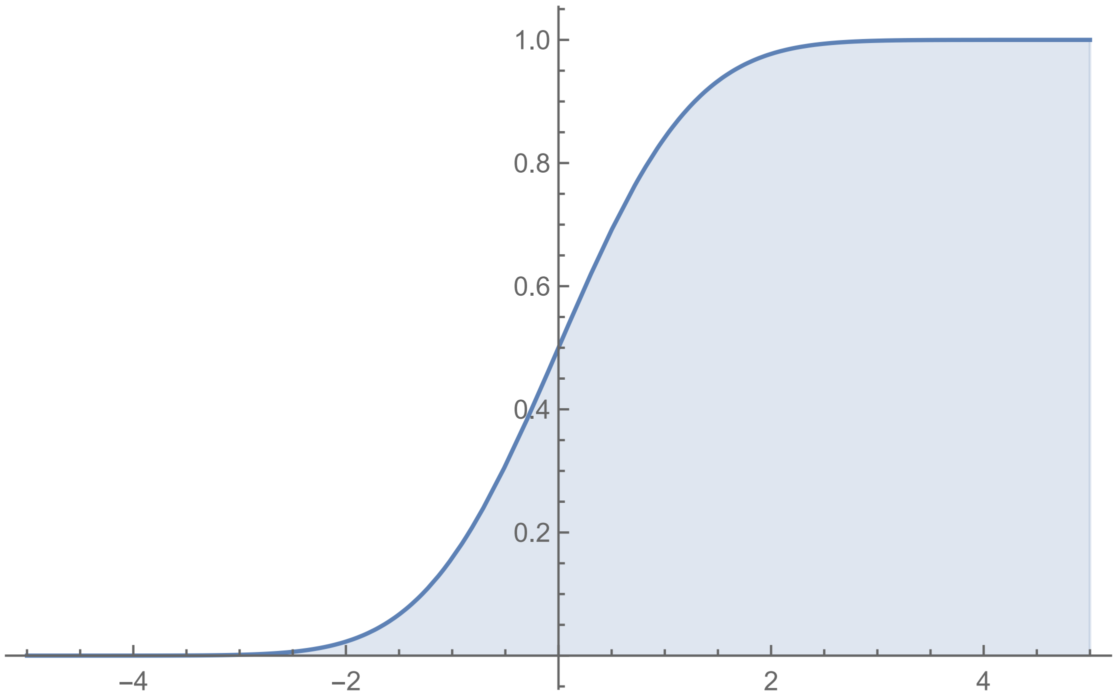
la loi normale standard

Paramètre : $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



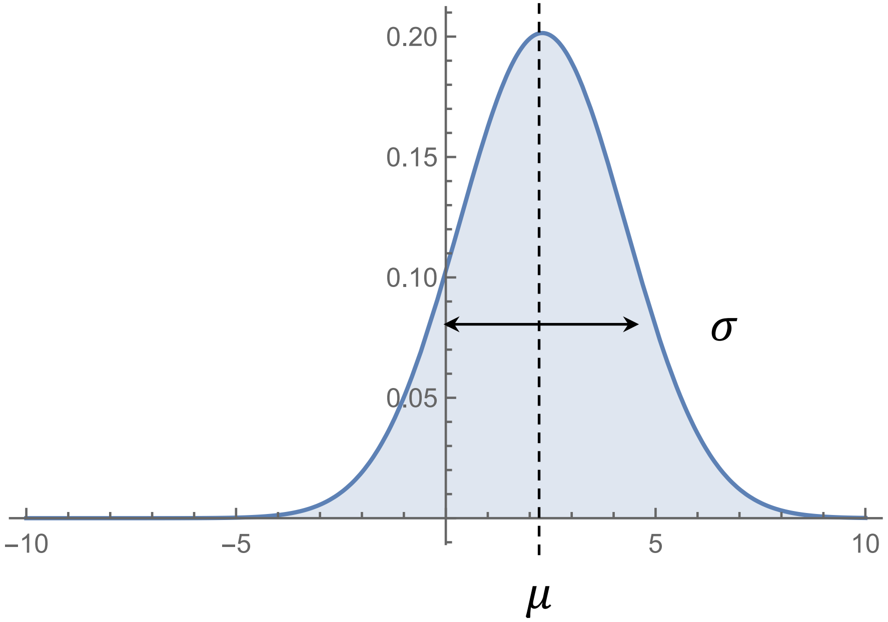


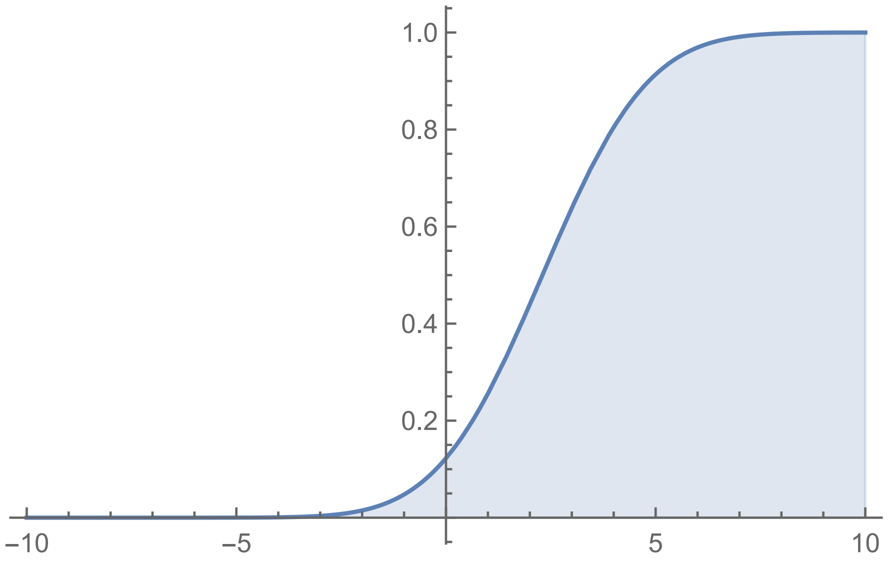
la loi normale

Paramètre : $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$





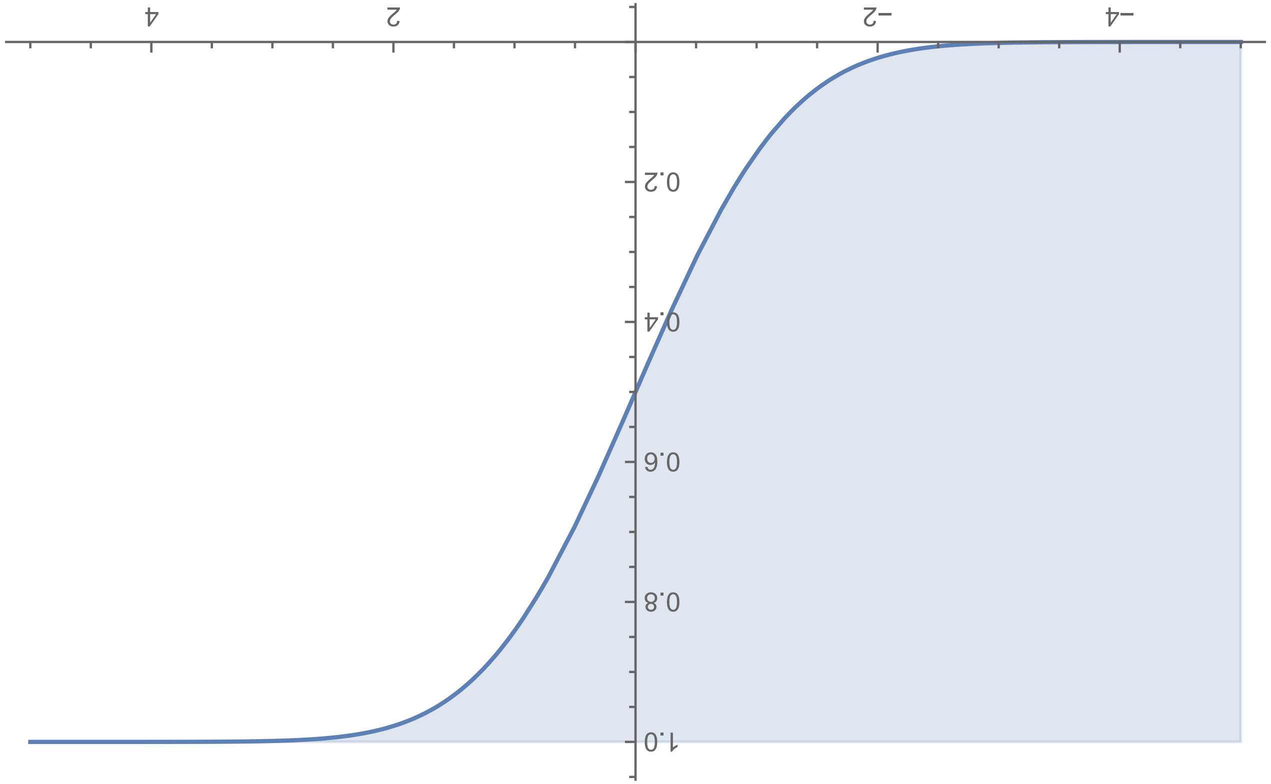
la loi normale $\Phi(z) = ?$

$z > 0$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.0	.5000	1.2	.8849
0.1	.5398	1.4	.9192
0.2	.5793	1.6	.9452
0.3	.6179	1.8	.9641
0.4	.6554	2.0	.9772
0.5	.6915	2.2	.9861
0.6	.7257	2.4	.9918
0.7	.7580	2.6	.9953
0.8	.7881	2.8	.9974
0.9	.8159	3.0	.9987
1.0	.8413	3.2	.9993

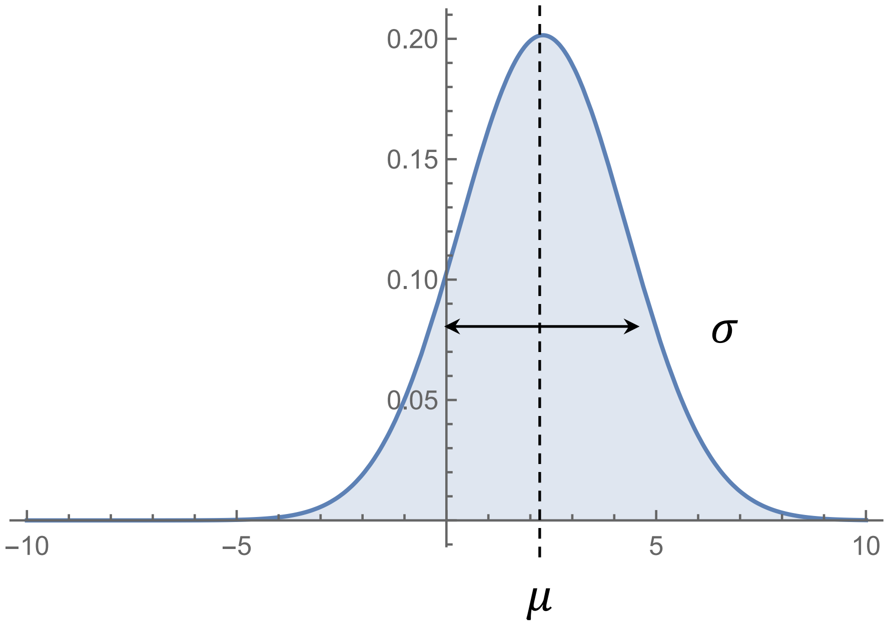
$z \leq 0$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



la loi normale

Paramètre : $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$



Espérance

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$

Variance

$$\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$$

exemple

La taille T d'un humain mâle adulte est une variable aléatoire distribuée normalement avec une moyenne de $\mu = 177$ centimètres et un écart-type de $\sigma = 10$ centimètres.*

(a) Les êtres humains ne peuvent pas être plus petits que 0 centimètres. Quelle est l'erreur qu'on fait ?

(b) Le 27 juin 1940, Robert Wadlow mesurait 272 centimètres, soit environ 8' 11" . Estimer la probabilité d'excéder cette taille.

*ces nombres sont sortis tout droit de mon c

Robert Wadlow à l’âge de 20 ans, en octobre 1938, rencontrant deux de ses idoles : Maureen O’Sullivan (à gauche)
et Ann Morris (à droite).
Il mesurait alors 2,62 m, et pesait quelques 221 kilos.

la loi khi-carré (χ^2)

Paramètre : $n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}_{X_i \text{ : variables aléatoires normales standard indépendantes}} = \chi_n^2$$

X_i : variables aléatoires normales standard indépendantes

variable aléatoire de loi khi-carré avec n degrés de liberté.

$$\Downarrow$$

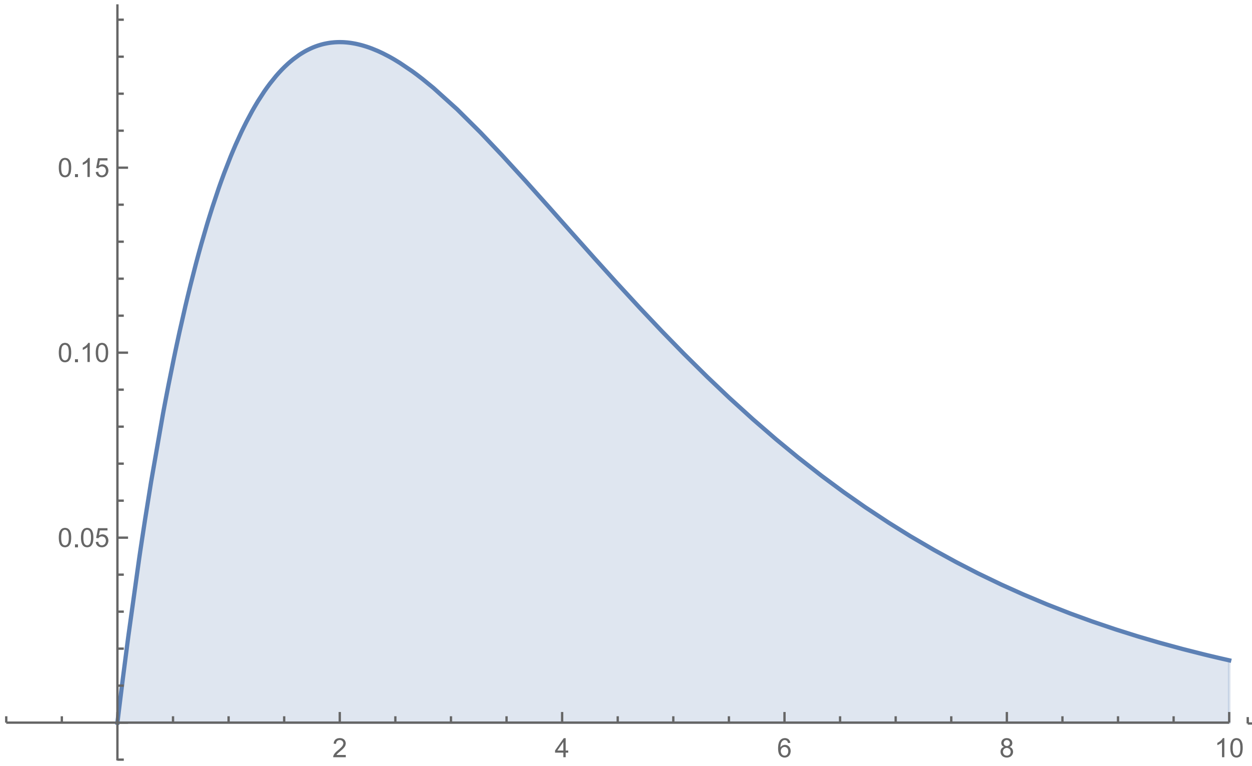
$$\mathbb{E}[\chi_n^2] = n \qquad \mathrm{Var}[\chi_n^2] = 2\,n$$

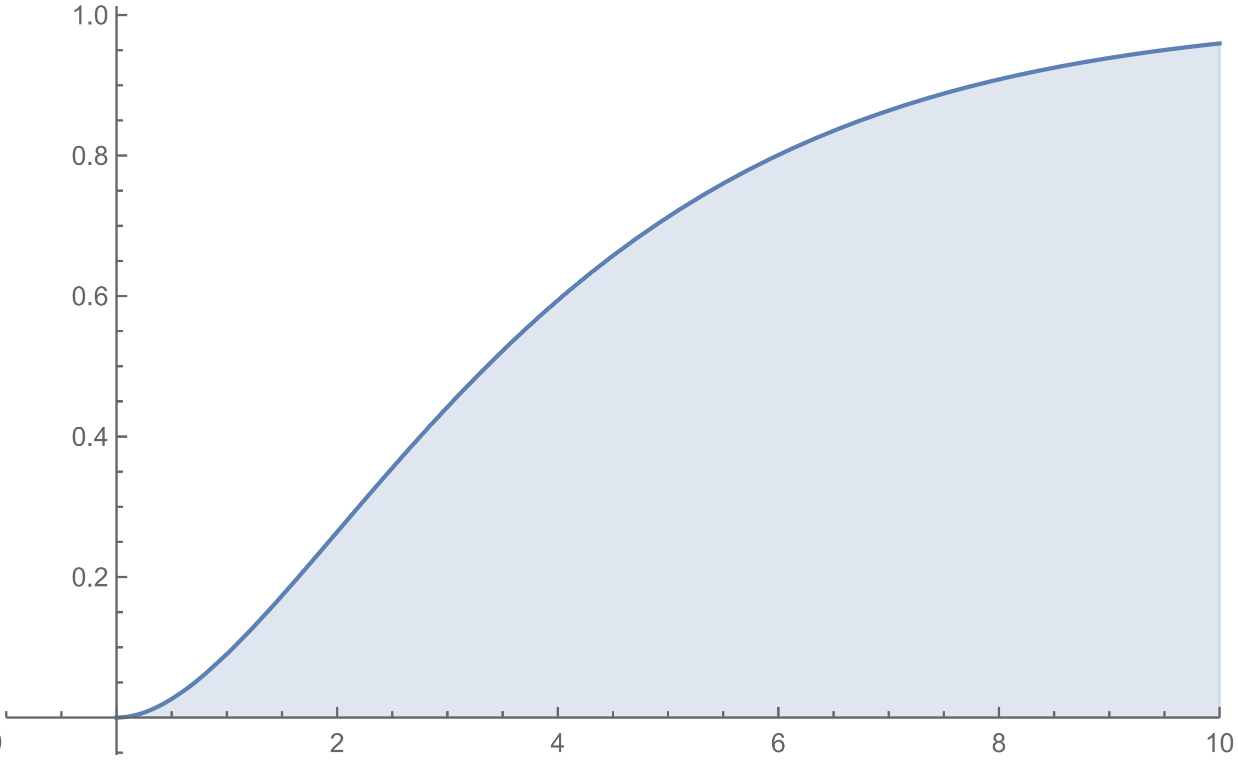
la loi khi-carré (χ^2)

Paramètre : $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = C\, x^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} e^{-\frac{x}{2}}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = \cdots$$





$n = 4$

la loi khi-carré (χ^2) $F(x) = ?$

$$\overline{F_n}(z_{n,\alpha}) = \mathbb{P}\{\chi_n^2 > z_{n,\alpha}\} = \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{F_n}^{-1}(\alpha) = z_{n,\alpha} \quad \Rightarrow$$

n	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$
5	0.83	1.15	11.07	12.83
6	1.24	1.64	12.59	14.45
7	1.69	2.17	14.07	16.01
8	2.18	2.73	15.51	17.54
9	2.70	3.33	16.92	19.02
10	3.25	3.94	18.31	20.48
11	3.82	4.58	19.68	21.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34
13	5.01	5.89	22.36	24.74
14	5.63	6.57	23.69	26.12

Cette table donne les inverses des fonctions de répartition complémentaires pour les lois du khi-carré.

la loi T de Student

Paramètre : $n \in \mathbb{N}$

variable normale standard

$$\frac{Z}{\sqrt{\chi_n^2/n}} = T_n$$

Variable aléatoire de loi T de Student à n degrés de liberté.

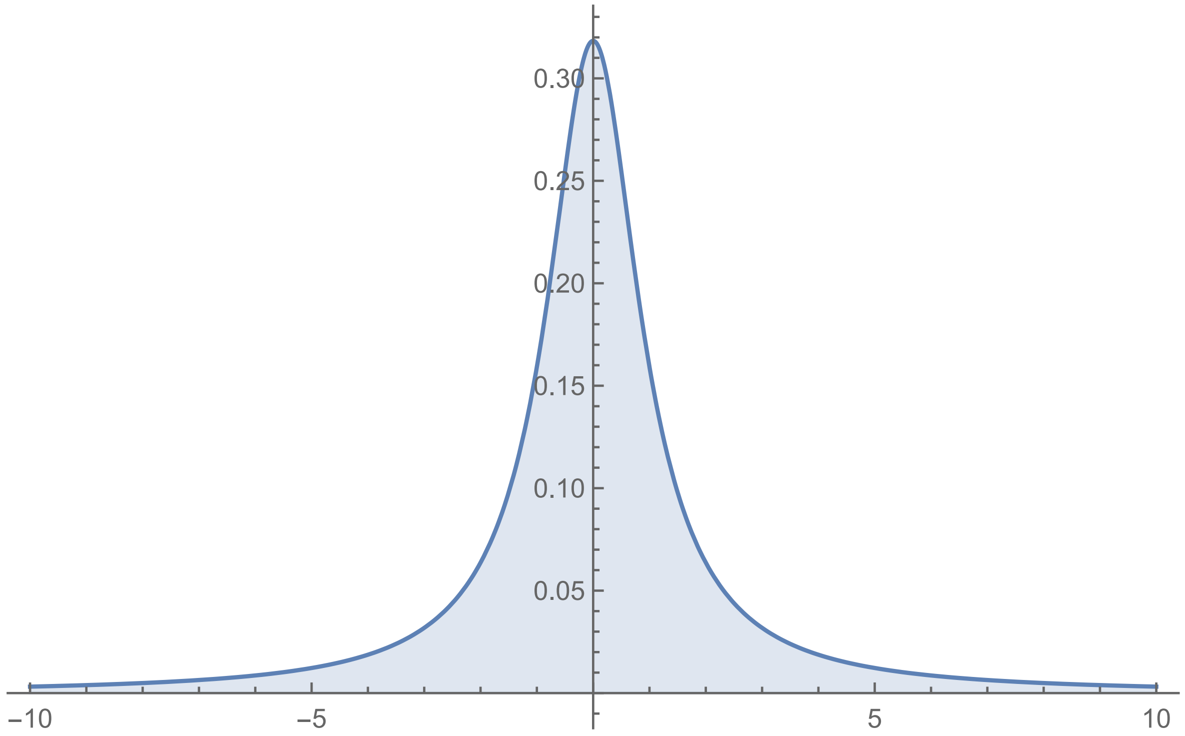
variable khi-2 à n degrés de libertés

$$\mathbb{E}[T_n] = 0 \qquad \mathrm{Var}[T_n] = \frac{n}{n-2}$$

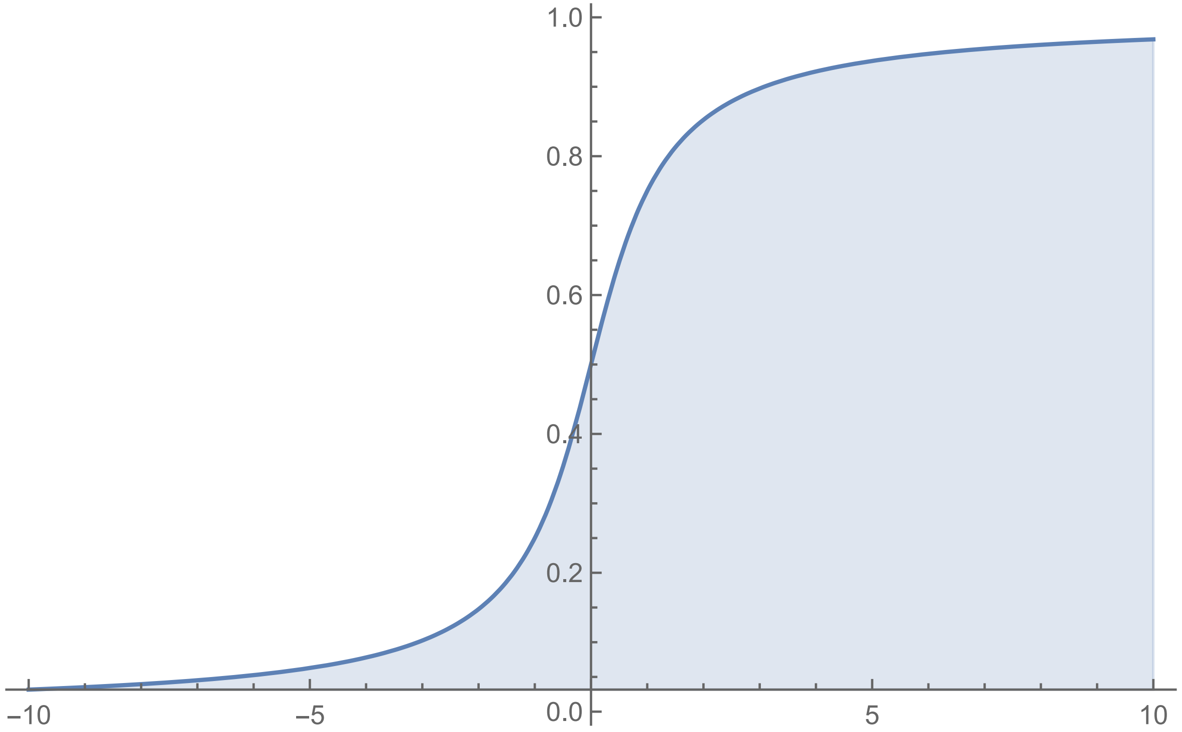
la loi T de Student

Paramètre : $n \in \mathbb{N}$

$f(x)$



$F(x)$



$n = 1$