P.ex. Si on lance un dé et succès = rouler 6, alors $p = 1/6$ et $\mu = 1/{}^1/_6 = 6$, donc il faut en moyenne 6 lancers pour obtenir son premier succès.

Loi de poisson

Déf On dit que $X \sim \text{poisson}(\nu)$ si X est discrète et sa fonction de masse est

$$p_X(k) = \begin{cases} e^{-\nu}\nu^k/k!, & \text{si } k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, ν est un paramètre réel strictement positif.

Verifions que p_X est bien une fonction de masse :

$p_X(x) \geq 0$ (clair)

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} p_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\nu}\nu^k/k!$$

$$= e^{-\nu} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!}}_{\text{Série de l'exponentielle}}$$

$$= e^{-\nu}e^{\nu}$$

$$= 1.$$

Proposition Si $X \sim \text{Poisson}(\nu)$, alors $\mathbb{E}(X) = \nu$.

Ainsi, le paramètre de X représente sa moyenne.

Dém. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\, p_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_X(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\nu}\nu^k/k!$$

$$= e^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{(k-1)!}$$

$$= \nu e^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \nu e^{-\nu} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!}}_{} \quad \text{(changement de variable } n = k-1\text{)}$$

$$= \nu e^{-\nu} e^{\nu} \quad \text{(Série de l'exponentielle)}$$

$$= \nu$$

On appelle parfois la loi de poisson la loi des événements rares, car elle apparaît comme cas limite de la loi binom(n,p) lorsque n est grand et p est petit.

Supposons que $X_n \sim \text{Binom}(n,p)$ avec $\nu = np$. Alors

$\Rightarrow p = \frac{\nu}{n}$

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{\nu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}}_{\to 1} \frac{\nu^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n}_{\to e^{-\nu}} \underbrace{\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$\longrightarrow e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Ex. On considère l'intervalle de temps entre 15h et 16h.
On considère qu'il y a un succès si quelqu'un se met en file à la caisse dans cette intervalle. $\text{Binom}(1, p_1)$

On divise l'intervalle en deux : 15h à 15h30 et 15h30 à 16h, on a maintenant deux épreuves. Binom$(2, p_2)$

On divise l'intervalle en 3, ce qui donne 3 épreuves Binom$(3, p_3)$
et ainsi de suite.
⋮

Lorsqu'on a divisé l'intervalle une infinité de fois, X = « nb de personnes qui s'est mis file » est une loi de poisson avec $\nu = \lim_{n\to\infty} n p_n$.

§4.5 Distribution absolument continue.

Déf Une variable aléatoire X est dite <u>absolument continue</u> si sa distribution est absolument continue : il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall a \leq b$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque technique : en fait, il faut $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$ pour tout borélien $B \subseteq \mathbb{R}$.

On appelle f la <u>densité de probabilité</u> de X.

Propriétés de f :

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$

<u>Dém</u>. 1. (Dans le cas où f est continue)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$

$$\frac{1}{h}\mathbb{P}(x \leq X \leq x+h) \geq 0 \implies \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \geq 0$$

$$\implies \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x) \geq 0.$$

2. $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$

Remarque $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

On a donc

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$

Attention! Ceci est faux dans le cas discret.

Analogie physique: On peut s'image que répend une masse de 1 kg sur l'axe réel. Dans le cas continue, on s'intéresse plutôt à la densité de masse au point x, qui correspond à $f(x)$. Si dx est un segment infinitésimal, alors $f(x)dx$ une masse infintésimal sur ce segment. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \text{Somme de toutes les masses infinitésimales} = 1\text{kg}.$$

§4.6 L'espérence d'une variable aléatoire absolument continue

Déf Soit X une variable aléatoire absolument continue. Soit f_X sa fonction de densité. Si

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx \text{ converge,}$$

alors on définit $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx$.

Ex. Si la fonction de densité de X est $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$ où

$\lambda > 0$ est un paramètre, alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{M} x f(x)dx &= \int_0^M x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \left[x e^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda^2} \right]_0^M \\ &= \lambda M e^{-\lambda M} - \frac{e^{-\lambda M}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$u = x \qquad dv = e^{-\lambda x}$

$du = dx \qquad v = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}$

$$\to 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} \quad (M \to \infty)$$

donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

§4.7 Loi uniforme et loi exponentielle.

Déf Une variable aléatoire X suit une <u>loi uniforme</u> sur $[a,b]$ si X est absolument continue et sa fonction de densité f est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \sim \text{uniforme}(a,b)$.

Ex $X \sim \text{Uniforme}(0,1)$.

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{Q} \cap [0,1]) = \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} dx = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq q \leq 1}} \int_{\{q\}} dx = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq q \leq 1}} 0 = 0.$$

On a donc $\mathbb{P}(X \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0,1]) = 1$.

Autrement dit, si on pige un nombre au hasard entre 0 et 1, il sera irrationnel avec probabilité 1. (On dit aussi « presque sûrement » irrationnel.)

Proposition Si $X \sim \text{Uniforme}(a,b)$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

Déf Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si X est absolument continue et sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \sim \exp(\lambda)$.

<u>Rem</u>. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 1$
$f(x) \geq 0$
$\Big\}$ f est bien une fonction de densité

Proposition Si $X \sim \exp(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Théorème Soit $\lambda > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère $X_k = \text{géo}\left(\frac{\lambda}{k}\right)$.
Alors $\frac{X_k}{k}$ converge vers une variable aléatoire $X \sim \exp(\lambda)$ dans le sens suivant : $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_k}{k} \leq x\right) = \mathbb{P}(X \leq x)$. (convergence en loi)

<u>Dém</u>.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{X_k}{k} \leq x\right) &= \mathbb{P}(X_k \leq kx) \\
&= \mathbb{P}(X_k < \lfloor kx \rfloor + 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \geq \lfloor kx \rfloor + 1) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{\lfloor kx \rfloor} \\
&\xrightarrow{(k\to\infty)} 1 - e^{-\lambda x} = \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = P(X \leq x). \quad \square
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$.

<u>Ex</u>. On attend en file. Le temps d'attente est en moyenne 5min.
À chaque $\frac{60\,s}{k}$, si ce n'est pas encore notre tour, on compte un échec. On pose X_k = nombre de tentative pour que ce soit notre tour.

Alors, $X_1 \sim \text{géo}(\mu)$. On a $\frac{1}{\mu} = \mathbb{E}(X_1) = 5\,\text{min} = 300\,s$.
$\Rightarrow \mu = \frac{1}{300}$

De plus, $X_k = \text{geo}\left(\frac{1}{300k}\right)$, car on a k fois plus d'échec que X_1 en moyenne.
Si on normalise, on trouve $\frac{X_k}{k} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \exp\left(\frac{1}{300}\right)$

Ainsi, on peut utiliser la loi exp pour modéliser le temps d'attente.

§4.8 Fonction de répartition.

La <u>fonction de répartition</u> d'une variable X est $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

- Cas discret : $F_X(x) = \sum_{y \leq x} p_X(y)$

- Cas absolument continue : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ et $F_X'(x) = f_X(x)$ si f_X est continue.

Théorème Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire, alors F satisfait aux quatre conditions suivantes :

1) F est croissante : $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

2) F est continue à droite : $\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$

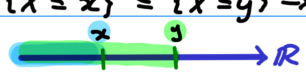
3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

4) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

<u>Remarque</u> Si une fonction F vérifie 1 à 4, alors il existe une variable aléatoire X telle F est la fonction de répartion de X.

(optionnelle) <u>Dém.</u> Soit X la v.a. de F.

1) si $x \leq y$, alors $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}_{= F(x)} \leq \underbrace{\mathbb{P}(X \leq y)}_{= F(y)}$



2) Comme F est croissante, il est suffisant de montrer que $\lim_{n \to \infty} F(x + \frac{1}{n}) = F(x)$.

Comme $\{X \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x + \frac{1}{n}\}$, cela suit de la continuité de $\mathbb{P}$:

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}_{= F(x)} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x + \tfrac{1}{n}\}\right) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x + \tfrac{1}{n})}_{= F(x + 1/n)}$$ (Exercice série supp)

3) Comme $\emptyset = \bigcap_{n=-1}^{-\infty} \{X < n\}$, on a $0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \lim_{n \to -\infty} \mathbb{P}(X \leq n) = \lim_{n \to -\infty} F(n)$.

Puisque F est croissante, cela montre le résultat.

4) Même idée, avec $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \geq n\}$. $\square$