

Semaine 4

Espérance d'une variable discrète

Binomial, géométrique, Poisson

Variables continues

Espérance d'une variable continue

Fonction de répartition

L'espérance mathématique d'une loi discrète

Rappel

Une variable X est discrète si sa distribution est discrète :

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B} p_X(x).$$

Dans ce cas, sa fonction de masse $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ vaut 0 partout, sauf sur un ensemble au plus dénombrable (p.ex. : $\{1, 2, \dots, n\}$, \mathbb{N} ou \mathbb{Z}).

Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire discrète et p sa fonction de masse. On définit l'*espérance mathématique* de X , noté $\mathbb{E}(X)$, par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} xp(x),$$

où la somme est faite sur tous les éléments x tels que $p(x) \neq 0$.

Exemples calculatoires

Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

1. $X =$ valeur d'un

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{j=1}^6 j p_X(j) && (p_X(j) = \mathbb{P}(X = j)) \\ &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5\end{aligned}$$

2. $Y =$ nb de piles, pour 4 lancers à pile ou face

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=0}^4 j p_Y(j) && (p_Y(j) = \mathbb{P}(Y = j)) \\ &= 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{1 + 4 + 12 + 12 + 4}{16} = \frac{33}{16} = 2\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Exemple 1

Espérance d'une variable discrète

Une urne contient dix boules. Trois boules ont la valeur 1, quatre boules ont la valeur 2, deux boules ont la valeur 3 et une boule a la valeur 4. On tire une boule au hasard et on pose $X =$ la valeur de la boule tirée. Calculer l'espérance de X .

Solution. La fonction de masse de X est

$$p_X(k) = \begin{cases} 3/10, & \text{si } k = 1 \\ 4/10, & \text{si } k = 2 \\ 2/10, & \text{si } k = 3 \\ 1/10, & \text{si } k = 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in} x p_X(x) = \sum_{k=1}^4 k p_X(k) \\ &= 1p_X(1) + 2p_X(2) + 3p_X(3) + 4p_X(4) \\ &= 1(3/10) + 2(4/10) + 3(2/10) + 4(1/10) \\ &= 21/10 = 2,1 \end{aligned}$$

Exemple 1 (suite)

Espérance d'une variable discrète

Espérance : on a trouvé

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1(3/10) + 2(4/10) + 3(2/10) + 4(1/10) \\ &= 21/10 = 2,1\end{aligned}$$

Moyenne arithmétique des 10 boules :

$$\begin{aligned}\text{Moyenne} &= \frac{\text{somme des valeurs des boules dans l'urne}}{\text{nombre de boules dans l'urne}} \\ &= (1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4)/10 \\ &= [(1 \times 3) + (2 \times 4) + (3 \times 2) + (4 \times 1)]/10 \\ &= 1p_X(1) + 2p_X(2) + 3p_X(3) + 4p_X(4) = \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

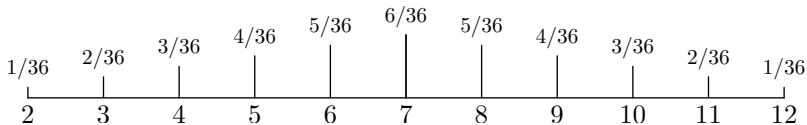
La valeur moyenne des dix boules est égale à l'espérance.

Exemple 2

Espérance d'une variable discrète

On lance une paire de dé et on considère $X =$ la somme des dés.
Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution. On a déjà calculé p_X . Voici son graphe :



Selon l'interprétation physique de l'espérance, $\mu = \mathbb{E}(X)$ est le centre de masse de la distribution.

Comme la distribution est symétrique par rapport à 7, on doit avoir $\mu = 7$.

Exemple 3

Espérance d'une variable discrète

On considère la variable aléatoire X = nombre de personnes qui se mettent en file à la caisse.

Si la fonction de masse de X est $p_X(n) = e^{-3} \frac{3^n}{n!}$ si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et 0 ailleurs, calculer l'espérance de X .

Solution. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} np_X(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-3} n \frac{3^n}{n!} \\ &= e^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n-1)!} \\ &= 3e^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 3e^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = 3e^{-3} e^3 = 3.\end{aligned}$$

Exemple 4

Espérance d'une variable discrète

Un casino veut ajouter un jeu très simple où le croupier donne deux cartes au participant. Si le participant a une paire, il gagne q dollars, sinon il perd un dollar.

Quelle est la plus grande valeur du prix q que le casino peut donner de telle sorte que le jeu soit toujours en la faveur de la maison ?

Solution. On pose X = l'argent gagné par un participant. On a

$$\mathbb{P}(X = q) = \mathbb{P}(\text{piger une paire}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{13 \times 6}{1326} = \frac{1}{17}$$

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(\text{pas une paire}) = 1 - \mathbb{P}(\text{paire}) = \frac{16}{17}$$

On trouve

$$\mathbb{E}(X) = q\mathbb{P}(X = q) + (-1)\mathbb{P}(X = -1) = q\frac{1}{17} - \frac{16}{17} = \frac{q-16}{17}.$$

Si $q > 16$, le casino va perdre de l'argent en moyenne, donc il serait mieux de choisir $q < 16$.

Résumé de trois lois discrètes

Loi binomiale

$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$

p = probabilité d'un succès, n = nombre d'épreuves

X = nb de succès parmi n épreuves

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \mathbb{E}(X) = np$$

Loi géométrique

$$X \sim \text{geo}(p)$$

p = probabilité d'un succès

X = nombre d'essais pour un premier succès

$$p_X(n) = (1-p)^{n-1} p, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

Loi de Poisson

$$X \sim \text{Poisson}(\nu)$$

ν = moyenne

$$p_X(n) = e^{-\nu} \nu^n / n!, \quad \mathbb{E}(X) = \nu$$

Exemples d'applications pour la loi de Poisson

- 1 Compter le nombre de personnes qui se mettent en file dans un intervalle de temps donné
- 2 Compter le nombre de coups de foudre dans une région
- 3 Compter le nombre de visiteurs sur un site web (s'il n'y a pas trop de monde)
- 4 Compter le nombre de pannes d'un système informatique

Variables continues

Variable aléatoire absolument continue

Variable absolument continue

Soit X une variable aléatoire. On dit qu'elle est *absolument continue* s'il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $a \leq b$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

$f(x) \geq 0$ pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- $\mathbb{P}(X = a) = 0$ donc
- $\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Exemple 1

Variable continue

On dit que X suit une loi *uniforme* sur $[a, b]$ si la fonction de densité f_X de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{si } x \in [a, b], \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouver c .

Solution. Il faut $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$, donc

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = \int_a^b c dx = c(b - a),$$

$$\text{donc } c = \frac{1}{b-a}.$$

Exemple 2

Variable continue

Si X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2]$, quelle est la probabilité que $X \in [\frac{2}{3}, 1]$?

Solution.
$$\mathbb{P}\left(\frac{2}{3} \leq X \leq 1\right) = \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{3}}^1 1 dx = \frac{1 - 2/3}{2} = \frac{1}{6}.$$

Exemple 3

Variable continue

On choisit un nombre aléatoire ω dans le disque centré à l'origine de rayon 5 dans \mathbb{R}^2 . Soit $X =$ distance entre ω et l'origine.

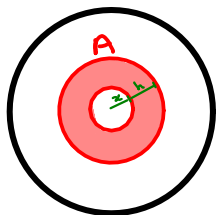
Trouver la fonction de densité de X .

Solution. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x \leq X \leq x + h) &= \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \frac{\text{aire de l'anneau}}{\text{aire totale}} \\ &= \frac{2\pi xh + \pi h^2}{25\pi}\end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{2x}{25} + \frac{h}{25} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient $\frac{2x}{25} = f(x)$.



$$\begin{aligned}\text{Aire}(A) &= \pi(x+h)^2 - \pi x^2 \\ &= 2\pi xh + \pi h^2\end{aligned}$$

Espérance mathématique d'une variable absolument continue

Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire absolument continue et f sa fonction de densité. Si

$$\int_{\mathbb{R}} |x|f(x)dx \text{ converge,}$$

alors on définit l'*espérance mathématique* de X par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx.$$

Exemple 1

Espérance mathématique d'une variable aléatoire absolument continue

Si X suit une loi uniforme sur $[1, 3]$, alors sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [1, 3], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance est

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_1^3 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^3 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2.$$

Exemple 2

Espérance mathématique d'une variable aléatoire absolument continue

Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, alors sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance est

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

Exemple 3

Espérance mathématique d'une variable aléatoire absolument continue

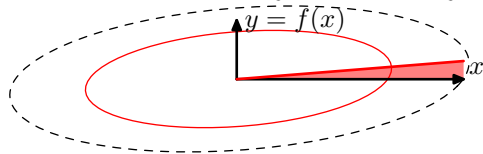
On reprend l'exemple de $X =$ distance entre ω et l'origine, où ω est choisi au hasard dans le disque de rayon 5 dans \mathbb{R}^2 . Calculer l'espérance de X .

Solution. On rappelle que la fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{25}, & \text{si } 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^5 x \frac{2x}{25} dx = \int_0^5 \frac{2x^2}{25} dx = \frac{2x^3}{75} \Big|_0^5 = \frac{10}{3}$$



En rouge, cercle de rayon $\mu = 10/3$

Fonction de répartition

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. Sa *fonction de répartition* est

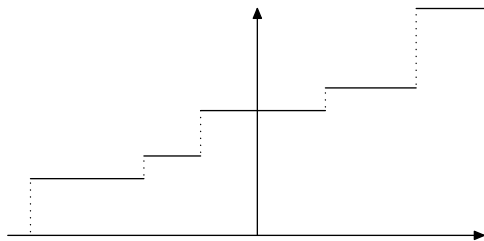
$$F(x) := \mathbb{P}(X \leq x).$$

- La définition est valable pour toutes les variables (y compris discrètes ou absolument continues).
- F est croissante : si $x \leq y$, alors $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$, donc $\mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y)$.
- $0 \leq F(x) \leq 1$

Fonction de répartition de X discrète

$$F(x) = \sum_{k \leq x} p(x)$$

- F est une fonction en escalier ;
- si x est un point de discontinuité, alors la taille du saut est $p(x)$;



Fonction de répartition de X absolument continue

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

- si f est continue en x , alors $F'(x) = f(x)$

