

## Semaine 2

- Cas équiprobable
- Formule d'inclusion-exclusion
- Analyse combinatoire, partie 1

# Cas équiprobable

## Équiprobable

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, avec  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

Si  $\Omega$  est fini, alors  $\mathbb{P}$  est *équiprobable* si  $\mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(y)$  pour tout  $x, y \in \Omega$ .

- Par abus de notation, on écrit  $\mathbb{P}(x)$  pour signifier  $\mathbb{P}(\{x\})$ .
- Si  $\Omega$  possède  $n$  éléments, disons  $x_1, \dots, x_n$ , alors
$$\mathbb{P}(x_1) = \dots = \mathbb{P}(x_n) = \frac{1}{n}.$$

# Exemple 1

Équiprobable

Lancer un dé à six faces équilibré.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathbb{P}(1) = \frac{1}{6}, \dots, \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$$

# Exemple 2

## Équiprobable

Lancer deux dés à six faces équilibrés.

$\Omega = \{(1, 1), \dots, (6, 6)\}$ , il y a  $6 \times 6 = 36$  éléments

$\mathbb{P}(i, j) = \frac{1}{36}$  quelque soit  $1 \leq i, j \leq 6$

# Exemple 3

## Équiprobable

La somme de deux dés à 4 faces équilibrés

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\mathbb{P}(2) = \frac{1}{16}, \mathbb{P}(3) = \frac{1}{8}, \text{ etc.}$$

Ce n'est pas équiprobable !

## Exemple 3

### Équiprobable

La somme de deux dés à 4 faces équilibrés

On se ramène au cas équiprobable en considérant

$\Omega = \{(1, 1), \dots, (4, 4)\}$  (16 éléments)

Pour calculer  $\mathbb{P}(\text{somme} = j)$ , on compte le nombre d'éléments  $(a, b)$  qui vérifient  $a + b = j$ .

Somme	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
Éléments	(1, 1)	(1, 2) (2, 1)	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)
Proba	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

Somme	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
Éléments	(2, 4), (3, 3) (4, 2)	(3, 4), (4, 3)	(4, 4)
Proba	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

## Exemple 4

### Équiprobable

Une machine produit des bits dont les valeurs (0 ou 1) sont équiprobables.

1. Si elle produit une chaîne de longueur 4 avec des bits aléatoire, quelle est la probabilité d'obtenir 1011 ?

Il y a  $2^4 = 16$  chaînes de longueur 4 équiprobable, donc  $\mathbb{P}(\text{produire } 1011) = \frac{1}{16}$ .

## Exemple 4

### Équiprobable

Une machine produit des bits dont les valeurs (0 ou 1) sont équiprobables.

2. Quelle est la probabilité que la chaîne de longueur 4 contient exactement un 1 (et donc trois 0) ?

Les chaînes qui vérifient le critère sont

1000 0100 0010 0001

La probabilité est donc  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ .

## Probabilité d'un complément

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

- $\mathbb{P}(A^c)$  est parfois plus facile à calculer que  $\mathbb{P}(A)$ .
- En particulier, pour un événement  $A$  qui contient un « au moins » et pour lequel  $A^c$  contient « aucun ».

# Exemple 1

## Complément

On reprend l'exemple de la machine qui produit des bits aléatoires équiprobables.

Calculer la probabilité de l'événement

$A$  = la chaîne de 4 bits contient au moins un bit 1.

**Solution.** On considère le complément

$A^c$  = la chaîne de 4 bits ne contient aucun bit 1.

Il est clair que  $A^c = \{0000\}$ , donc

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

# Principe d'inclusion-exclusion

## Principe d'inclusion-exclusion pour les proba

2 événements  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

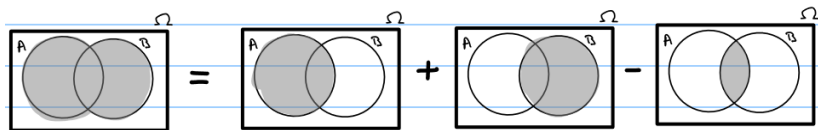
3 événements  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$   
 $- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C)$   
 $+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

- (Optionnel)  $n$  événements

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

# Principe d'inclusion-exclusion, visualisation

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



# Exemple 1

## Inclusion-exclusion

On lance deux dés à six faces équilibrés. Quelle est la probabilité de rouler au moins un 4 ?

**Solution.** Soit les événements :

$A$  = le premier dé vaut 4

$B$  = le deuxième dé vaut 4

On a bien sûr  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$ . Qu'en est-il de  $\mathbb{P}(A \cap B)$  ?

$A \cap B$  = rouler une paire de 4 =  $\{(4, 4)\}$ ,

donc  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$ .

Réponse :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

## Combinatoire

La *combinatoire* est la branche des mathématiques qui compte des objets d'une catégorie donnée.

On verra aujourd'hui

- le principe fondamental du dénombrement
- les permutations

# Principe fondamental du dénombrement

On considère une procédure de  $k$  étapes qui doivent être réalisées dans un certain ordre.

- 1 Il y a  $n_1$  façons de faire la 1ère étape.
- 2 Peu importe comment la 1ère étape est accomplie, il y a  $n_2$  façons de faire la 2e étape.
- 3 Peu importe comment la 2e étape est accomplie, il y a  $n_3$  façons de faire la 3e étape.
- 4 et ainsi de suite pour les étapes restantes.

Alors il y a  $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$  façons d'accomplir cette procédure.

Un et “devient” une multiplication.

# Exemples

## Dénombrement

1. Combien de chaînes de bits de longueur 3 y a-t-il ?

Réponse :  $2 \times 2 \times 2 = 8$

2. Combien de chaînes en symboles octals de longueur 4 y a-t-il ?

Réponse :  $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 = 4096$

3. Combien de combinaisons peut-on former en utilisant les chiffres 6,9,2 une seule fois ?

Réponse :  $3 \times 2 \times 1 = 6$

Vérification : 269 296 629 692 926 962

# Permutation

## Permutation

Une *permutation* de  $n$  objets (distinguables) est un arrangement ordonné de ces objets.

Par exemple : ABC et BAC sont deux permutations des objets A, B et C.

# Compter les permutations

## Factoriel

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $n!$  (lu «  $n$  factoriel ») par  
 $n! := n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$ . Si  $n = 0$ , on définit  $0! := 1$ .

## Théorème

Il y a  $n!$  permutations de  $n$  objets, pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

# Exemples 1

## Permutations

1. Combien y a-t-il de permutations des lettres A,B,C,D ?

Réponse :  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

2. Combien y a-t-il de permutations des lettres A,A,B,C,D ? (Il y a deux A qu'on ne peut distinguer l'un de l'autre.)

Réponse :  $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 60$

En effet, si on avait eu les lettres A,B,C,D,E, il y aurait eu  $5!$  permutations. Comme  $E = A$  est indistinguable de A, il y a 2 fois trop de permutations, car on peut échanger le A et le E dans chaque permutation sans changer cette dernière.

3. Combien y a-t-il de permutations des lettres A,A,A,B,C,D ?

Réponse :  $\frac{6!}{3!} = 40$  (Même raisonnement qu'au 2)

# Jeudi Combinaisons

# Coefficient binomial

## Rappel

### Coefficient binomial

Pour  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , avec  $0 \leq k \leq n$ , on définit  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

On peut lire  $\binom{n}{k}$  come « $k$  parmi  $n$ ».

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\textcircled{2} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{r}$$

## Combinaison

Une *combinaison de  $k$  objets parmi  $n$  objets* est un groupe de  $k$  objets (sans ordre) parmi  $n$  objets.

Si  $A = \{n \text{ objets}\}$ , alors une combinaison de  $k$  parmi  $n$  est un sous-ensemble  $B \subseteq A$  de  $k$  éléments.

## Théorème

Il y a  $C_{n,k} := \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$  combinaisons de  $k$  parmi  $n$ .

On fera la démonstration au tableau après.

# Exemple 1

## Combinaison

Dans un graphe de  $n$  sommets, combien y a-t-il de d'arêtes possibles entre deux sommets distincts ?

Une arête correspond au choix de 2 sommets parmi les  $n$ , il y a donc  $\binom{n}{2}$  possibilités.

## Exemple 2

### Combinaison

On pige deux cartes dans un paquet standard. Quelle est la probabilité de piger un paire ?

**Solution.** Pour piger une paire, on choisit une hauteur parmi 13 et deux sortes parmi 4. Ceci correspond à  $\binom{13}{1} \binom{4}{2}$ .

Il y a  $\binom{52}{2}$  mains possibles de deux cartes. La probabilité est donc

$$\frac{\binom{13}{1} \binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \approx 0,0588$$

## Exemple 3

### Combinaison

On pige trois cartes. Quelle est la probabilité de piger une paire, mais pas un triple.

**Solution.** On choisit une hauteur pour la paire parmi 13 et 2 sortes parmi 4. On choisit une autre carte d'une hauteur différente, donc une carte parmi 48. ( $52 - 4 = 48$ )

$$\text{Réponse : } \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{48}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{3744}{22100}$$

## Exemple 3

### Combinaison

Un brelan est une main de poker qui comprend un triple et deux cartes de hauteurs différentes entre elles et différente de la hauteur du triple. Si on pige cinq carte au hasard, quelle est la probabilité d'obtenir un brelan ? **Solution.** On peut procéder comme suit :

- 1 On choisit une hauteur parmi 13 et 3 sortes parmi cartes ; il y a  $\binom{13}{1} \binom{4}{3}$  façons de le faire.
- 2 On choisit, parmi les 12 hauteurs restantes, 2 autres hauteurs ; il y a  $\binom{12}{2}$  façons de le faire.
- 3 Pour chaque hauteur de l'étape précédente, on choisit une sorte parmi 4, donc  $\binom{4}{1} \binom{4}{1}$ .

Il y a donc  $\binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{2} \binom{4}{1}^2 = 54\,912$  façons de faire un brelan.

La probabilité est  $\frac{54\,912}{2\,598\,960}$

# Exemple 4

## Combinaison

Une urne contient des billes numérotées de 1 à 10. Quelle est la probabilité de tirer sans remise 1,3,7 dans n'importe quel ordre ?

**Solution.** Il y a  $\binom{10}{3} = 120$  façons de tirer trois billes, donc la probabilité est  $\frac{1}{120}$ .

## Exemple 5

### Combinaison

On doit hisser  $n$  drapeaux rouges et  $k$  drapeaux blancs sur  $n + k$  mats en ligne. Combien y a-t-il de configurations possible, si les drapeaux de même couleur sont indistinguables ?

**Solution.** Il y a autant de configuration qu'il y a de façons de choisir les  $k$  mats sur lesquels hisser les  $k$  drapeaux blancs.

Réponse :  $\binom{n+k}{k}$

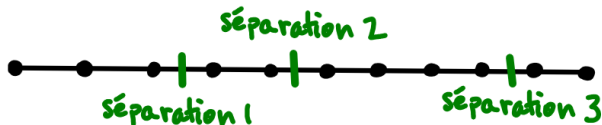
$\binom{n+k}{n}$  fonctionne aussi

## Exemple 6

### Combinaison

On dispose de  $n$  boules indiscernables que l'on doit placer dans  $r$  boîtes identifiées boîte 1, boîte 2, etc. Combien y a-t-il de configurations si chaque boîte doit contenir au moins une boule ?

**Solution.** On suppose que  $n \geq r$ . On place les boules sur droites, ce donne  $n - 1$  espaces entre les boules. On choisit  $r - 1$  espaces et on y trace une séparation, disons la séparation 1, la séparation 2, etc.



On met les boules à gauche de la séparation 1 dans la boîte, les boules entre les séparations 1 et 2 dans la boîte 2 et ainsi de suite. Ainsi, il y a  $\binom{n-1}{r-1}$  façons d'obtenir ces configurations.

# Chapitre 3

## Probabilité conditionnelle et indépendance

# Exemple 1

## Probabilité conditionnelle

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On vous annonce que la somme des dés est 8. Quelle la probabilité de rouler au moins un 6 sachant cette information ?

**Solution.** Il y a cinq résultats possibles pour lesquels la somme est 8 :

$$(2, 6) \quad (3, 5) \quad (4, 4) \quad (5, 3) \quad (6, 2)$$

Parmi ces lancers, deux en contiennent au moins un 6, dnc la réponse est  $\frac{2}{5}$ .

# Probabilité conditionnelle

## Probabilité conditionnelle

Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Si  $\mathbb{P}(B) > 0$ , on définit la *probabilité de  $A$  conditionnelle à  $B$*  par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Le symbole  $\mathbb{P}(A|B)$  se lit « probabilité de  $A$  sachant  $B$  ».

- $\mathbb{P}(A|B)$  est la probabilité que  $A$  se réalise sachant que  $B$  s'est réalisé

# Retour à l'exemple 1

## Probabilité conditionnelle

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On vous annonce que la somme des dés est 8. Quelle la probabilité de rouler au moins un 6 sachant cette information ?

**Solution.** Refaisons cet exemple avec les événements. On pose

$A$  = rouler au moins un 6

$B$  = la somme vaut 8

Alors

$$A = \{(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6), (5, 6), \dots, (1, 6)\}$$

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$A \cap B = \{(6, 2), (2, 6)\}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 2 \text{ et } \mathbb{P}(B) = 5, \text{ donc}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2}{5}$$

## Exemple 2

### Probabilité conditionnelle

Une urne contient 5 billes noires et trois billes blanches. On en tire deux au hasard sans remise. Quelle est la probabilité que la deuxième bille soit blanche ?

**Solution.** Soit  $A$  = première bille est blanche

$B$  = deuxième bille est blanche

Si  $A$  s'est réalisé, alors il reste 2 billes blanches parmi 7 billes, donc

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{2}{7}.$$

Si  $A^c$  s'est réalisé, alors il reste 3 billes blanches parmi 7 billes, donc

$$\mathbb{P}(B|A^c) = \frac{3}{7}.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{6+15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$