Semaine 1

Fondements des probabilités

Les probabilités

Les probabilités

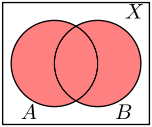
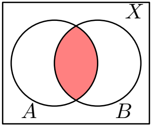
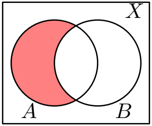
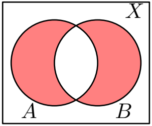
- sont une branche des mathématiques qui formalisent les phénomènes caractérisés par le **hasard**.
- Pour le cours, elles permettent d'étudier les données statistiques de manière **théorique**.

Concepts

- Rappel : opérations sur les ensembles
- Expérience aléatoire
- Événements

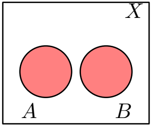
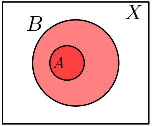
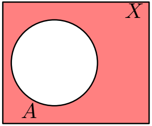
Opérations sur les ensembles

Rappel

$A \cup B$	Union	
$A \cap B$	Intersection	
$A \setminus B$	Différence	
$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	Différence symétrique	

Définition

Rappel

$A \cap B = \emptyset$	Disjoint (Mutuellement exclusif)	
$A \subseteq B$	Inclusion	
$A^c := X \setminus A$	Complément	

- Égalité d'ensembles : $A = B \iff [A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A]$
- $A_1, \ldots, A_n$ sont *mutuellement exclusifs* si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ (deux à deux disjoints)

Propriétés des opérations

Rappel

1. Distributivité de l'union sur l'intersection :
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$

2. Distributivité de l'union sur l'intersection :
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap B)$

3. Loi de De Morgan pour un complément d'unions :
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

4. Loi de De Morgan pour un complément d'intersections :
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Relations utiles : $A \setminus B = A \cap B^c, \quad A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

Notions préliminaires

Une *expérience aléatoire*

est une expérience renouvelable (en théorie) dont le résultat ne peut pas être prévu. **Ex.** Pile ou face, lancer un dé, piger une carte

L'*univers* Ω (se lit omega)

d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résulats possibles de l'expérience (modalités).

Un *événement*

lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble de possibilités (un sous-ensemble de l'univers).

Exemple

Lancé de dé

On lance un dé (à six faces). On se demande si on aura un nombre pair.

- Expérience aléatoire : lancé du dé
- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- L'événement : $E = \{2, 4, 6\}$ = lancer un nombre pair

Exemples

1. Pile ou face
   $\Omega = \{P, F\}$
   Ex. d'événement : lancer pile $E = \{P\}$

2. Piger une carte dans un paquet standard
   $\Omega = \{A\spadesuit, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, 2\spadesuit, \ldots\}$
   Ex. d'événement : piger du cœur $E = \{A\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, \ldots, K\heartsuit\}$

3. Deviner la combinaison d'un code à 3 chiffres sans répétition
   $\Omega = \{012, 013, 014, 015, 016, 017, 018, 019, 021, 023, 024, \ldots\}$
   Ex. d'événement : le code commence par 43
   $E = \{430, 431, 432, 435, 436, 437, 438, 439\}$

Union (ou)

Soit $A, B \subseteq \Omega$, deux événements.

L'**union** de A et B

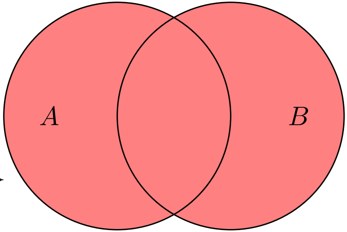
est $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
$A \cup B$ représente l'événement « A **ou** B ».

Ex. : Rouler un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ rouler pair $= \{2, 4, 6\}$

$B =$ rouler $1 = \{1\}$

$C =$ rouler pair ou $1 = A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$



Union (ou)

Exemple

On pige deux cartes dans un paquet de cartes standard.

$A =$ piger un roi

$B =$ piger un pique

Écrire $C = A \cup B$ comme un ensemble.

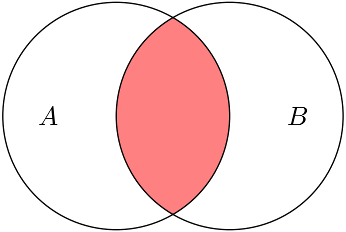
Intersection (et)

Soit $A, B \subseteq \Omega$, deux événements.

L'**intersection** de A et B

est $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
$A \cap B$ représente l'événement «A **et** B».

Ex. : Rouler un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$A =$ rouler pair $= \{2, 4, 6\}$

$B =$ rouler $1 = \{1\}$

$C =$ rouler $2 = \{2\}$

$D =$ rouler pair et $1 = A \cap B = \emptyset$

$E =$ rouler pair et $2 = A \cap C = \{2\}$

Intersection (et)

Exemple

On pige une carte dans un paquet de cartes standard.

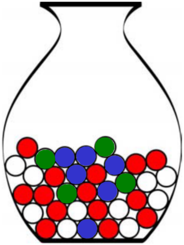
$A =$ piger un roi

$B =$ piger un pique

Écrire $C = A \cap B$ comme un ensemble.

Exemple plus compliqué

On pige 3 billes dans une urne qui contient des billes rouges, bleus et vertes.
$A =$ piger au moins 1 bille rouge
$B =$ piger exactement 1 bille verte
Écrire $C = A \cup B$ et $D = A \cap B$ comme des ensembles.



Mesure de probabilité

Une mesure de probabilité sur Ω

est une fonction $\mathbb{P}$ définie sur les événements telle que

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. (probabilité de A) quelque soit l'événement A, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
3. (σ-additivité) si $A_1, A_2, \ldots$ sont des événements mutuellement exclusifs, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

3 implique l'additivité fini :
(additivité) si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements mutuellement exclusifs, alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$;

Exemple 1

(Intuition)

On roule un dé.

1. $A =$ rouler 4
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$

2. $B =$ rouler un nombre pair
$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exemple 2
(Intuition)

On pige une carte dans un paquet standard.

1. $A =$ piger le 3 de trèfle
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{52}$

2. $B =$ piger un 3
$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$