Examen intra

MAT1978 – Probabilités et statistique – Hiver 2026

Département de mathématiques et de statistique — Université de Montréal

Enseignant : Jonathan Godin 25 février 2026

Justifiez toutes vos réponses. Une réponse sans justification ne vaut aucun point.

Calculatrice simple permise. Aucun autre matériel.

/35

Question 1. (6pts) On joue à pile ou face 6 fois. Ensuite, pour chaque pile obtenu, on lance 10 dés à six faces équilibrés.

a) (1pt) Soit $X =$ *nombre de piles*. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) (2pts) Soit $Y =$ *nombre de dés qui vallent X ou moins*. Pour chaque $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si $X = k$, quelle est la loi de probabilité de Y par rapport à k ?

c) (3pts) Calculer $\mathbb{P}(Y = 60)$.

Question 2. (11pts) On choisit deux nombres au hasard de façon uniforme et indépendante dans l'intervalle $[0, 1]$.

a) (3pts) Soit $X =$ *nombre le plus grand*. Montrer que la densité de probabilité de X est

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indice. Commencer par calculer la fonction de répartition de X.

b) (3pts) Calculer la fonction génératrice des moments de X.

c) (3pts) Calculer l'espérance et la variance de X.

d) (2pts) Les deux points divisent l'intervalles en trois segments. La longueur de chaque segment est une variable aléatoire. Calculer la longueur moyenne du troisième segment.

Question 3. (6pts) Les questions a) à c) sont indépendantes. Rappel : montrez vos calculs et expliquez votre raisonnement.

a) (3pts) On pige quatre cartes dans un paquet de cartes standard (52 cartes). Quelle est la probabilité de piger au moins trois cartes de la même hauteur ? (Hauteurs : As,2,3,...,10,J,Q,K)

b) (3pts) On place en ligne 5 jetons rouges, 4 jetons bleus et 7 jetons verts au hasard. Quelle est la probabilité que les jetons soient regroupés en couleurs ?

c) (*Bonus* 2pts) Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire une boule avec remise jusqu'à obtenir la boule 3. Soit l'événement $A =$ parmi les tirages, la boule 1 et

(Suite au verso)

la boule 2 sont tirées le même nombre de fois. Calculer $\mathbb{P}(A)$. (*Suggestion.* Faites cette question en dernier s'il vous reste du temps.)

Question 4. (12pts) On se retrouve devant n portes placées en ligne de gauche à droite. L'une d'elle cache un trésor inestimé et l'une d'elle, une terrible malédiction. Le trésor et la malédiction ne peuvent pas être derrière la même porte. Toutes les portes ont la même probabilité de cacher le trésor ou la malédiction. On ouvre les portes à partir de la gauche vers la droite en ordre, jusqu'à trouver le trésor.

a) (3pts) Soit $X =$ *nombre de portes ouvertes pour trouver le trésor*. Calculer la fonction de masse de X. (Rappel : justifiez toutes vos réponses !)

b) (3pts) Quelle est la probabilité de trouver le trésor avant de tomber sur la terrible malédiction ?

c) (3pts) On considère les événements $A =$ *la première porte cache la malédiction* et $B =$ *la deuxième porte cache le trésor*. Ces événements sont-ils indépendants ?

d) (3pts) On suppose maintenant que chaque porte a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être vérouillée, sauf la porte qui cache le trésor, qui est certaine d'être vérouillée. Heureusement, on possède une clé passe-partout qui peut déverouiller toutes les portes. Si une porte n'est pas vérouillée, on ne l'ouvre pas. Quelle est maintenant la probabilité de tomber sur la malédiction en cherchant le trésor ?

Remarque. Il n'est pas nécessaire de réussir le a) pour faire le b), le b) pour faire le c) ou le c) pour faire le d).

(Suite au verso)