Semaine 11

Retour sur l'intervalle de confiance d'une moyenne et loi de Student

Intervalle de confiance pour une moyenne

Rappel

- Supposons que $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où μ inconnue
- Rappel : l'estimateur de μ est $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$
- On sait que $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- $Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$
- Comme $\mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 95\%$,
  - $$\begin{aligned} -1.96 \leq Z \leq 1.96 &\Leftrightarrow -1.96 \leq \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq 1.96 \\ &\Leftrightarrow -1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \hat{\mu} - \mu \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Intervalle de confiance pour une moyenne

Rappel

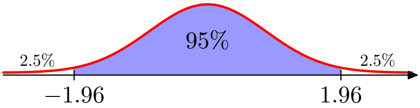
Niveau de confiance de 95%

L'intervalle de confiance pour une moyenne

avec niveau de confiance 95% est donnée par

$$\left[\hat{\mu} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

lorsque σ est connue.



$$\mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

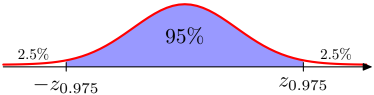
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\hat{\mu} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = .95$$

Il ne faut pas apprendre par cœur le « 1.96 ». Voyons comment on le trouve.

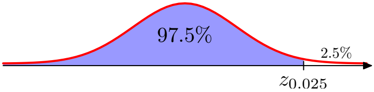
Le 0.975-quantile

Rappel

On note $z_{0.975}$ le nombre tel que $\mathbb{P}(Z \leq z_{0.975}) = 0.975$, où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. On appelle $z_{0.975}$ le **0.975-quantile**.



on déduit



Pour trouver $z_{0.975}$, on cherche 0.975 à l'intérieur de la table de valeur de la loi normale et on prend la valeur dans la première ligne et la première colonne.

Intervalle de confiance pour une moyenne

Rappel

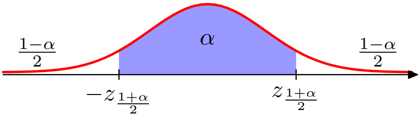
Niveau de confiance de α

L'intervalle de confiance pour une moyenne

avec niveau de confiance α est donnée par

$$\left[\hat{\mu} - z_{1+\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\frac{1+\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

lorsque σ est connue, où $z_{\frac{1+\alpha}{2}}$ est le $(\frac{1+\alpha}{2})$-quantile de $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

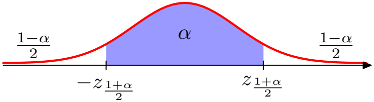


$$\mathbb{P}(-z_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}}) = 0.95$$

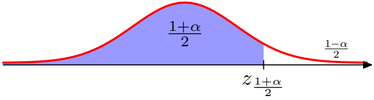
$$\Rightarrow \mathbb{P}(\hat{\mu} - z_{\frac{1+\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + z_{1+\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = .95$$

Le $(\frac{1+\alpha}{2})$-quantile

Rappel



on déduit



Pour trouver $z_{\frac{1+\alpha}{2}}$, on cherche $\frac{1+\alpha}{2}$ à l'intérieur de la table de valeur de la loi normale et on prend la valeur dans la première ligne et la première colonne.

Ex. 1. Calculer le 0.99-quantile.

2. Trouver z tel que $\mathbb{P}(-z \leq Z \leq z) = 0.99$.

Étape pour calculer un intervalle de confiance

avec niveau de confiance α

Étapes.

1. Calculer $\overline{x}$, la moyenne empirique
2. L'écart type est supposée connue
3. Calculer le $(\frac{1+\alpha}{2})$-quantile, c'est-à-dire trouver $z_{\frac{1+\alpha}{2}}$ dans la table de la loi normale telle que $\mathbb{P}(-z_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}}) = \alpha$
4. Calculer la borne inférieure $\overline{x} - z_{\frac{1+\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
5. Calculer la borne supérieur $\overline{x} + z_{\frac{1+\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Exemple

On s'intéresse à la moyenne du nombre pour qu'un bébé né prématurément commence à marcher. On a observé un échantillon de $n = 10$ bébés nés prématurément

$$12 \quad 11 \quad 14 \quad 10 \quad 14 \quad 12 \quad 15 \quad 11 \quad 14 \quad 15.$$

Trouver un intervalle de confiance au niveau 97.5% pour la moyenne, sachant que l'écart type est de $\sigma = 1.5$mois.

Exemple (suite)

Intervalle de confiance de Student

Si on remplace σ par $\hat{\sigma}$, alors $Z = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ suit maintenant une **loi de Student** avec $n-1$ degrés de liberté.

$\hat{\sigma}^2 = \hat{S}^2$ l'estimateur sans biais de la variance

Étape.

1. Calculer $\overline{x}$, la moyenne empirique
2. Calculer s, l'écart type empirique
3. Calculer le $\frac{1+\alpha}{2}$-quantile t, c'est-à-dire trouver t dans la table de la loi de **Student** avec $n-1$ degrés de liberté telle que $\mathbb{P}(-t \leq Z \leq t) = \alpha$
4. Calculer la borne inférieure $\overline{x} - t \times \frac{s}{\sqrt{n}}$
5. Calculer la borne supérieur $\overline{x} + t \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

Exemple

Un échantillon de $n = 10$ personnes ont suivi un régime. On a mesuré les pertes de poids

$$-1.6 \quad -0.1 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1.0 \quad 1.6 \quad 1.7 \quad 2.6.$$

Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95%.

Exemple (suite)

Intervalle de confiance de Wald ou de Student

IC de Wald

- $\hat{\mu}$ suit une loi normale (ou approximativement)
- le **vrai** écart type σ est connu

Alors $Z = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ suit une loi **normale**, donc on utilise la table de la loi normale.

IC de Student

- $\hat{\mu}$ suit une loi normale (ou approximativement)
- le vrai écart type σ est **inconnu**

Alors $Z = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ suit une loi de **Student** avec $n-1$ degré de liberté, donc on utilise la table de la loi de Student.