

Topologie

Série 5

Revêtement

1. Revêtement et relèvement

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que $p: S^1 \rightarrow S^1; x + \mathbb{Z} \mapsto nx + \mathbb{Z}$ est un revêtement, où $x + \mathbb{Z} \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. (De façon équivalente, vous pouvez faire l'exercice avec $z \mapsto z^n$, où $z \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$.)

Exercice 2. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ fixés. Montrer que $p: T \rightarrow T; (x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) \mapsto (mx + \mathbb{Z}, nx + \mathbb{Z})$ est un revêtement de T , où $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le tore. Faire un dessin d'un voisinage distingué dans T et sa préimage par p dans T .

Exercice 3. Soit (Y, τ) un espace topologique discret. Montrer que $p: X \times Y \rightarrow X; (x, y) \mapsto x$ est un revêtement de X , où (X, τ') est un autre espace topologique.

Exercice 4. Soit (X, p) un revêtement de B . Soit $A \subseteq B$. On pose $Y := p^{-1}(A)$. Montrer que $p|_Y: Y \rightarrow A$ est un revêtement de A .

Exercice 5. Soit (X, p) un revêtement de B . Montrer que si B est connexe, alors $\#p^{-1}(b_1) = \#p^{-1}(b_2)$ pour tout $b_1, b_2 \in B$.

Exercice 6. Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite un *homéomorphisme local* si pour chaque $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $f|_U: U \rightarrow f(U) \subseteq Y$ est un homéomorphisme. Montrer que si (X, p) est un revêtement de B , alors p est un homéomorphisme local.

Exercice 7. Soit (X, p) un revêtement de B . Montrer que p est une application ouverte, c'est-à-dire que pour tout U ouvert dans X , $p(U)$ est ouvert dans B .

Exercice 8. Soit (X, p) un revêtement de B . Montrer que si B est compact et si, pour tout $b \in B$, la fibre au-dessus de b est fini, alors X est compact.

Exercice 9. Montrer que si (X, p) est un revêtement de B et si X est compact, alors pour tout $b \in B$, la fibre au-dessus de b est fini.

Exercice 10[†]. Soit $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ la fonction exponentielle complexe $\exp(z) = e^z = 1 + \sum_n \frac{z^n}{n!}$. Montrer que $(\mathbb{C}, \exp)$ est un revêtement universelle de $\mathbb{C}^*$. ($\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Indice. Considérer les voisinages de la forme $U_\theta = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} | r \in [0, \infty)\}$ de $\mathbb{C}^*$ et $f(z) = \int_a^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ sur U_θ , où a est n'importe quel point fixé de ce domaine.

2. Monodromie

Exercice 11. Soit $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow S^1$ des lacets en $(1, 0) \in S^1$. Soit $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ le revêtement universel de S^1 donné par $p(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$. Soit $\tilde{\alpha}_0$ le relèvement de α d'origine $0 \in p^{-1}(\{(1, 0)\})$. On pose $m := \tilde{\alpha}_0(1)$. Soit $\tilde{\beta}_m$ le relèvement de β d'origine m . Montrer que $\tilde{\alpha} \# \tilde{\beta}_m$ est le relèvement de $\alpha \# \beta$ d'origine 0.

Exercice 12. Soit (S^1, p) le revêtement de S^1 donné par $p(x + \mathbb{Z}) = nx + \mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé. Calculer la monodromie de ce revêtement au point $0 + \mathbb{Z}$.

Exercice 13. Soit $f: S^1 \rightarrow S^1; z \mapsto z^n$ (S^1 vu dans $\mathbb{C}$). Calculer l'homomorphisme induit $\hat{f}: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$. (De façon équivalente, vous pouvez travailler avec $f(x + \mathbb{Z}) = nx + \mathbb{Z}$.)

Exercice 14. Soit (X, p) un revêtement de B . Montrer que si X est connexe par arcs et B est simplement connexe, alors p est un homéomorphisme.