

Topologie

Série 4

Classification des surfaces

1. Variétés topologiques

Exercice 1. a) Montrer qu'un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une variété topologique.

b) Trouver un exemple d'un fermé $F \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que F est une variété topologique et un exemple où F n'est pas une variété topologique.

Solution. a) L'identité est un homéomorphisme de U avec un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $x \in U$, U est un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. D'où U est une variété de dimension n .

b) $F = \mathbb{R}^n$ est un fermé qui est une variété. En effet, il suffit d'appliquer le a), puisque $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$F = S^1 \vee S^1$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas une variété. En effet, si x_0 est le point de tangence des cercles, alors tout voisinage $B(x_0, r) \cap S^1 \vee S^1$, pour $r < 1$, ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$, car sinon, en retirant x_0 , on aurait un homéomorphisme entre quatre composantes connexes et deux composantes connexes, ce qui est impossible. Enfin, pour conclure, remarquons que tout voisinage U de x_0 contient un voisinage de la forme $B(x_0, r) \cap S^1 \vee S^1$ et si $f: U \rightarrow (a, b)$ est un homéomorphisme, alors f induit un homéomorphisme entre $B(x_0, r) \cap S^1 \vee S^1$ et un sous-intervalle $(c, d) \subseteq (a, b)$, ce qui est impossible.

Cela montre que F n'est pas une variété de dimension 1. Pour montrer que F n'est pas une variété de dimension n , commençons par montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ quelque soit $n > 1$. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme, alors cela induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $U \setminus \{f(0)\}$, mais cela est impossible puisque $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe, mais $U \setminus \{f(0)\}$ est connexe.

Soit maintenant $y \in S^1 \vee S^1$ avec $y \neq x_0$. On suppose par l'absurde qu'il existe un voisinage ouvert U de y et un homéomorphisme $f: U \rightarrow V$, où $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Il existe $r > 0$ tel que $B(y, r)$ ne contient pas x_0 ; on pose $U' = B(y, r) \cap S^1 \vee S^1$. Comme U' est ouvert et que f^{-1} est continue, il suit que U' est ouvert dans V . Or, U' est homéomorphe à $\mathbb{R}$ (il suffit d'utiliser la projection stéréographe sur le cercle $S^1 \setminus \{x_0\}$ qui contient y). Cela est une contradiction.

Remarquons que $S^1 \vee S^1$ se plonge dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$ et il est toujours fermé, donc cet exemple fonctionne pour tout $n \geq 2$.

Pour $\mathbb{R}^1$, il suffit de prendre $F = [0, 1]$. Je vous laisse écrire les détails.

Exercice 2. Montrer que S^n est une variété topologique compacte pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. Il est clair que S^n est compact, puisque c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

On pose $N = \{(0, \dots, 0, 1)\}$, le pôle nord de S^n . Pour tout $y \in S^n \setminus \{N\}$, on considère $U = S^n \setminus \{N\}$, un voisinage ouvert de y dans S^n . En effet, U est ouvert puisque S^n est ouvert et $\{N\}$ est fermé (et $U \setminus F$ est ouvert lorsque U est ouvert et F est fermé).

On considère $D_y(t) = N(1-t) + yt$, la droite passant par N et y . On cherche l'intersection de D_y avec le plan $\Pi = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = -1\}$. On a donc $D_y(t) \in \Pi$ ssi

$$N(1-t) + yt = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1-t) + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne $(1-t) + y_n t = -1$, donc $t = \frac{-2}{y_n - 1}$. On définit la projection stéréographique par

$$P(y) = N\left(1 - \frac{-2}{y_n - 1}\right) - \frac{2}{y_n - 1}y.$$

C'est une fonction de $S^n \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$. On voit qu'elle est continue par son expression. Pour montrer que c'est un homéomorphisme, on peut calculer son inverse (c'est la fonction $Q(x)$ qui est le point d'intersection entre la droite entre N et $x \in \Pi$ et S^n , je vous laisse faire les calculs).

Pour N , on fait la même chose, mais on prend $S = \{(0, \dots, -1)\}$ pour jouer le rôle de N et $\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 1\}$ pour jouer le rôle de Π .

Exercice 3. Montrer que $X = \{x^2 + y^2 < 1\} \cap \{y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ n'est pas une variété topologique.

Exercice 4. Une lemniscate de Bernoulli est un ensemble $\{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2)\}$ pour un $d > 0$ fixé. Montrer qu'une lemniscate de Bernoulli, muni de la topologie relative, n'est pas une variété.

Indice. Le paramétrage $\begin{cases} x = d \cos \theta \sqrt{2 \cos(2\theta)} \\ y = d \sin \theta \sqrt{2 \cos(2\theta)} \end{cases}$ vous sera peut-être utile, bien qu'il ne soit pas nécessaire.

Exercice 5. Une *courbe paramétrique* dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction continue $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle. Montrer que l'image d'une courbe paramétrique $\varphi(I)$, muni de la topologie relative, n'est pas nécessairement une variété topologique.

Solution. La lemniscate de l'exemple précédent et son paramétrage est un exemple. (Je vous laisse faire les détails; il faut définir φ sur un intervalle.)

Exercice 6. On considère H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) où

$$H_1 = H_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}, \quad H_2 = H_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\},$$

chacun muni de la topologie relative de $\mathbb{R}^2$. On pose $X = H_1 \sqcup \dots \sqcup H_4 / \sim$, où $\sim$ est l'identification sur la figure 1.

- Montrer que X est une surface.
- Trouver un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que X est homéomorphe à U .

Indice. Il y a une fonction de l'analyse complexe qui donne un homéomorphisme explicite. Cependant, il est suffisant d'illustrer un homéomorphisme avec des dessins sans formules.

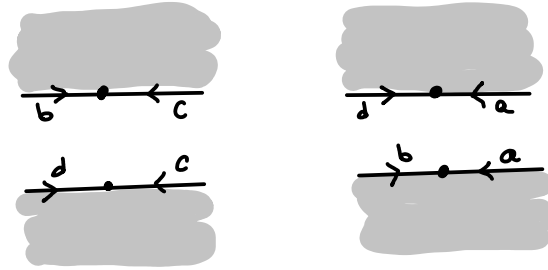
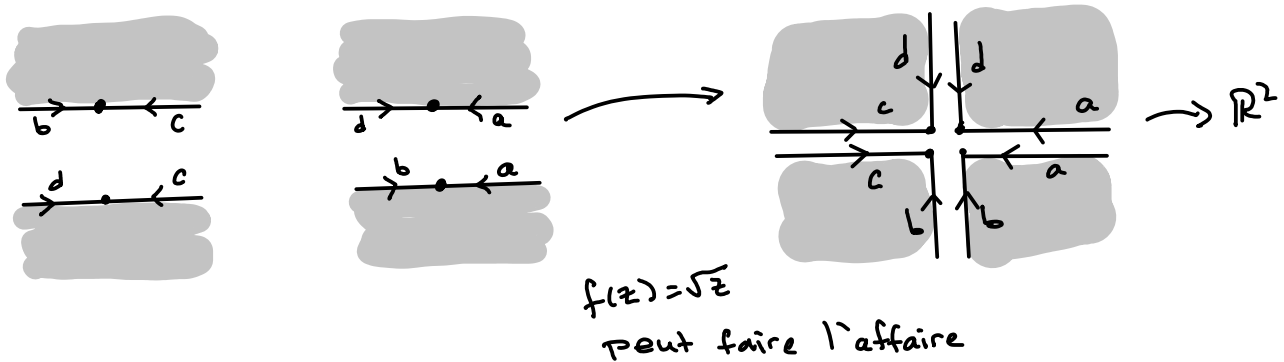


Figure 1. Identification des H_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Solution. Idée seulement :



Exercice 7. Un espace topologie (X, τ) est à base dénombrable s'il existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ dénombrable tel que $\tau = \tau(\mathcal{A})$. La définition habituelle d'une variété demande qu'elle soit à base dénombrable.

- Montrer que $\mathbb{R}^n$ est à base dénombrable.
- Montrer qu'un espace métrique compact (X, d) est à base dénombrable.

Indice. Considérer $\{B(x, 1/n) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}^*\}$.

- Montrer qu'une variété compacte est à base dénombrable.
- [†] Soit $\sim$ la relation sur $\mathbb{R}$ qui identifie tous les $n \in \mathbb{Z}$ en un seul point. On pose $X = \mathbb{R} / \sim$ muni de la topologie quotient. Montrer que X n'est pas à base dénombrable. (Cet exemple montre que la topologie quotient ne préserve pas nécessairement cette propriété.)

Solution. a) On peut prendre

$$\mathcal{A} = \{B(q, r) \mid q \in \mathbb{Q}, r > 0 \text{ et } r \in \mathbb{Q}\}.$$

Cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{Q}^n \times (\mathbb{Q} \cap [0, \infty))$, donc il est dénombrable.

Soit $B := B(x, r)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit $y \in B$. On pose $s := r - \|y - x\|$. Puisque que $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, il existe $q \in \mathbb{Q}^n$ tel que $\|q - y\| < s/2$. De plus, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $\rho \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < \rho < s/2$. On a donc $y \in B(q, \rho) \subseteq B(x, r)$. Ceci montre que $B(x, r) \in \tau(\mathcal{A})$. On conclut que $\tau(\mathcal{A})$ engendre la même topologie sur $\mathbb{R}^n$ que toutes les boules ouvertes.

b) Soit $\mathcal{U}_n := \{B(x, 1/n) \mid x \in X\}$. C'est un recouvrement ouvert de X et comme X est compact, il existe un sous-recouvrement ouvert, disons

$$\mathcal{U}_{n,k_n} = \{B(x_{n,1}, r_{n,1}), \dots, B(x_{n,k_n}, r_{n,k_n})\},$$

où $k_n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{U} := \bigcup_n \mathcal{U}_{n,k_n}$. C'est un ensemble dénombrable, puisque chaque $\mathcal{U}_{n,k_n}$ est fini et on fait un union dénombrable.

Soit $B(x, r)$ une boule arbitraire de X . Soit $z \in B(x, r)$. On pose $s := r - d(z, y)$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < s/2$. Comme $\mathcal{U}_{n,k_n}$ est un recouvrement de X , il existe $x_{n,j}$ tel que $z \in B(x_{n,j}, \frac{1}{n})$. Soit $\zeta \in B(x_{n,j}, \frac{1}{n})$. On a

$$\begin{aligned} d(\zeta, y) &\leq d(\zeta, x_{n,j}) + d(x_{n,j}, z) + d(z, y) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + r - s \\ &< \frac{s}{2} + \frac{s}{2} + r - s \\ &= r. \end{aligned}$$

Ceci montre que $B(x_{n,j}, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, r)$. Il suit que $B(x, r) \in \tau(\mathcal{U})$ et donc $\tau(\mathcal{U})$ engendre la même topologie que les boules ouvertes.

c) Soit X une variété compacte. Pour chaque $x \in X$, il existe une paire (U_x, φ_x) , où U_x est un voisinage ouvert de x dans X et $\varphi_x: U_x \rightarrow B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme. On appelle la paire (U_x, φ_x) une *carte* de x (elle n'est habituellement pas unique).

Soit $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in X}$ des cartes. La famille $\{U_x\}_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X . Comme X est compact, il existe un sous-recouvrement fini, disons $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Comme $B(0, 1)$ est ouvert de $\mathbb{R}^n$, il est à base dénombrable, donc U_{x_j} est à base dénombrable. Notons cette base $\mathcal{U}_j$.

Soit V un ouvert quelconque de X . On pose $V_j := V \cap U_{x_j}$. Chaque V_j est ouvert dans U_{x_j} , donc il existe des ouverts V_{j,k_j} ($k_j \in \mathbb{N}$) tels que

$$V_j = \bigcup_{k_j \in \mathbb{N}} V_{j,k_j}.$$

On a donc

$$V = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k_j \in \mathbb{N}} V_{j,k_j}.$$

Ainsi, $V \in \tau(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U} := \bigcup_j \mathcal{U}_j$, qui est dénombrable.

Exercice 8. Soit M une variété topologique de dimension n . On dit que $N \subseteq M$ est une *sous-variété* de dimension m si N muni de la topologie relative est une variété de dimension m . Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, il existe une sous-variété de dimension m dans S^n homéomorphe à S^m .

Solution. Soit $K := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$, le pôle nord. La projection stéréographique $P: S^n \setminus \{K\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme. On considère $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors $P(S^{n-1})$ est une sous-variété de S^n homéomorphe à S^{n-1} . (On utilise le prochain numéro.)

On peut procéder d'une autre façon qui n'utilise pas le prochain numéro. Soit $\Pi := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_j \in \mathbb{R}\}$ un hyperplan. On pose $N := S^n \cap \Pi$; c'est l'équateur de S^n . Remarquons que la topologie de N relative à S^n et celle relative à $\mathbb{R}^n$ sont les mêmes.

On voit que $x \in N$ ssi $x \in \Pi$ et $x \in S^n$, donc $x_n = 0$ et $\|x\| = 1$, d'où $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1$. On peut donc définir la projection $p: N \rightarrow S^{n-1}$ par $p(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Il est clair que p est un homéomorphisme. Puisque S^{n-1} est une variété, pour chaque point $y \in S^{n-1}$, il existe un ouvert U de S^{n-1} et un homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Ainsi, pour $(y, 0) \in U \times \{0\} \subseteq N$, $\varphi \circ p|_{U \times \{0\}}$ est un homéomorphisme. Donc N est une variété.

Exercice 9. Un *plongement* d'un espace topologique (X, τ) dans un autre espace topologique (Y, τ') est une application $f: X \rightarrow Y$ telle que f est un homéomorphisme de X dans $f(X)$, où $f(X)$ est munie de la topologie relative à Y . Soit M, N deux variétés. Montrer que si $f: M \rightarrow N$ est un plongement, alors $f(M)$ est une sous-variété de N .

Remarque. Il est alors commun d'identifier M à $f(M)$ et d'écrire, par abus de notation, $M \subseteq N$.

Exercice 10. On pose $\overline{\mathbb{H}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Une variété à *bord* de dimension 2 est un espace topologique (X, τ) Hausdorff tel que pour chaque $z \in X$, il existe un voisinage ouvert U de z dans X tel que U est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\overline{\mathbb{H}}$. Le *bord* de X , noté ∂X , est l'ensemble des z qui n'ont aucun voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- Montrer que si $z = (x, 0) \in \overline{\mathbb{H}}$, alors il n'y a aucun voisinage ouvert de z homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $z \in \partial X$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de z dans X , un ouvert V dans $\overline{\mathbb{H}}$ et un homéomorphisme $h: U \rightarrow V$ tels que $h(z) \in \partial \mathbb{H}^n$.

Solution. a) Supposons le contraire. Soit U un voisinage ouvert de z dans $\overline{\mathbb{H}}$ et un homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow B(0, 1)$. Si on retire z de U et $\varphi(z)$ de $B(0, 1)$, on obtient un homéomorphisme $\varphi': U \setminus \{z\} \rightarrow B(0, 1) \setminus \{\varphi(z)\}$. Or, cela est impossible, car $\pi_1(U \setminus \{z\}, *) \cong 0$ et $\pi_1(B(0, 1) \setminus \{\varphi(z)\}, *) \cong \mathbb{Z}$. D'où, il n'y a aucun tel homéomorphisme.

Exercice 11. Une surface à *bord* est une variété à bord connexe de dimension 2.

- Montrer que si X est une surface à bord, alors chaque composante de ∂X est une variété de dimension 1 (sans bord).

- b)[†] Montrer que si X est de plus compact, alors chaque composante est homéomorphe à S^1 .
- c) Soit Y une surface (sans bord). Soit U un ouvert de Y homéomorphe au disque unité $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}^2$ et soit $h: U \rightarrow \mathbb{D}$ un homéomorphisme. Soit $\mathbb{D}_{1/2} = B((0,0), \frac{1}{2})$. Montrer que $X := Y \setminus h^{-1}(\mathbb{D}_{1/2})$ est une variété à bord.
- d) Montrer que si Y est compact au b), alors X est compact.

Solution. a) Soit $z \in \partial X$. Il existe un voisinage ouvert U de z dans X , un ouvert $V = B(0,1) \cap \overline{H}$ et un homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow V$ avec $\varphi(z) = (0,0)$. Par le 10b), pour chaque $y = (x,0) \in V$, $\varphi^{-1}(y) \in \partial X$.

On pose $U' := U \cap \partial X$ et $V' := V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Alors $\varphi|_{U'}: U' \rightarrow V'$ est un homéomorphisme et V' est homéomorphe à un intervalle. Ceci montre que ∂X est une variété de dimension 1.

Par l'argument ci-haut, on peut aussi conclure que $\partial\partial X = \emptyset$. En effet, tout point de $z \in \partial X$ se trouve dans un ouvert de ∂X homéomorphe à un intervalle.

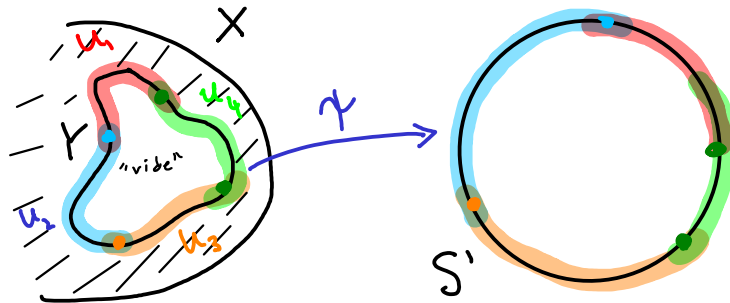
b) Comme X est compact, ∂X est compact. Soit Y l'une des composante de ∂X . On peut recouvrir Y par un nombre fini d'ouverts, disons $\{U_1, \dots, U_n\}$, chacun homéomorphe à un intervalle. On peut également supposer que ce recouvrement est minimal, c'est-à-dire que si on enlève l'un des U_j , ce n'est plus un recouvrement de Y .

On doit avoir que U_j intersecte exactement deux des autres ouverts. En effet,

- si U_j n'intersecte aucun des autres ouverts, cela contredit le fait que Y est connexe (puisque chaque U_j est connexe, étant homéomorphe à un intervalle);
- si U_j intersecte un seul des autres ouverts, alors une extrémité ouverte de U_j se trouve dans Y et cela contredit le fait que Y est fermé;
- si U_j intersecte plus de deux des autres, alors cela contredit le fait que le recouvrement est minimal (je vous laisse le démontrer).

Sans perte de généralité, on peut supposer que les U_i sont ordonnées de sorte que U_1 intersecte U_n et U_2 , que U_2 intersecte U_1 et U_3 et ainsi de suite.

Le dessin explique l'idée pour définir l'homéomorphisme.



On choisit $x_0 \in U_n \cap U_1$, $x_1 \in U_1 \cap U_2$ etc., jusqu'à $x_{n-1} \in U_{n-1} \cap U_n$. On pose également $x_n := x_0$. Soit $\varphi_j: U_j \rightarrow (a,b)$ un homéomorphisme. Pour $1 \leq k \leq n$, quitte à post-composer φ_k par une fonction affine, on peut supposer que le codomaine de φ_k est intervalle ouvert qui contient $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ et que $\varphi_k(x_{k-1}) = \frac{k-1}{n}$ et $\varphi_k(x_k) = \frac{k}{n}$.

On peut maintenant définir $\psi: Y \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par $\psi(x) = \varphi_j(x)$ si $x \in U_j$ et entre x_{j-1} et x_j (inclusivement). Comme $\psi(x_0) = 0 = 1 \pmod{1}$, elle est bien définie à valeur dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Elle est surjective sur $[0, 1] \pmod{1}$, donc sur S^1 . Elle est continue par le lemme du recollement. Elle est injective, puisque chaque φ_j est injective. Comme Y est compact et que ψ est une bijection continue sur Y , il suit que ψ est un homéomorphisme.

2. Théorème de classification des surfaces compactes

Exercice 12. a) Montrer que $K \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

b) Montrer que $\mathbb{R}P^2 \# T \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Exercice 13. Pour chacun des symboles suivants, dessiner le polygone correspond en y indiquant les lettres et les flèches sur les arêtes. Trouver un symbole standard associé et identifier la surface. Décomposer la démarche de la solution en petites étapes simples de découpage-recollement en indiquant le découpage et les arêtes recollées.

a) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$

b) $abab$

c) $aabb^{-1}$

d) $acd^{-1}ba^{-1}dc^{-1}b^{-1}$

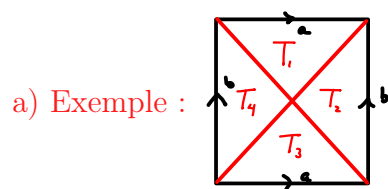
e) $abba^{-1}cddc^{-1}$

Exercice 14. Trouver une triangulation du tore avec

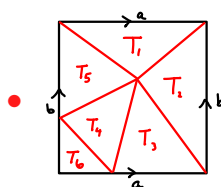
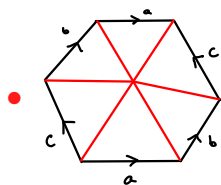
a) 4 triangles;

b) 6 triangles.

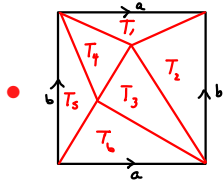
Solution. Il y a plusieurs réponses possibles.



b) Exemples :



(Cet exemple est un piège, ce n'est pas une triangulation. Voyez-vous pourquoi?)

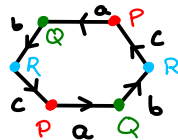


Exercice 15. Pour chacune des surfaces, déterminer le nombre de points distincts auxquels les sommets sont identifiés. Si ce nombre est plus que 1, trouver un polygone équivalent pour lequel tous les sommets sont identifiés à un seul point.

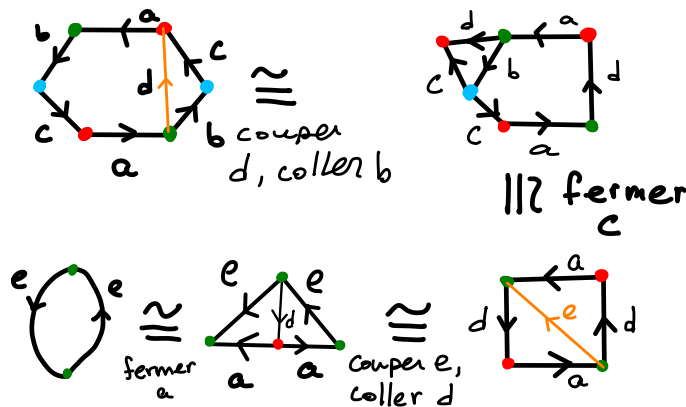
a) $abcabc$

b) $abcdabcd$

Solution. a) Il y a trois sommets, comme on peut le voir sur la figure

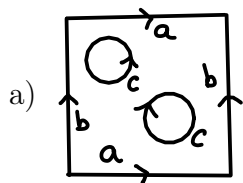


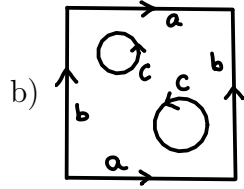
On peut faire les découpages-recollements suivant



On arrive à $\mathbb{R}P^2$.

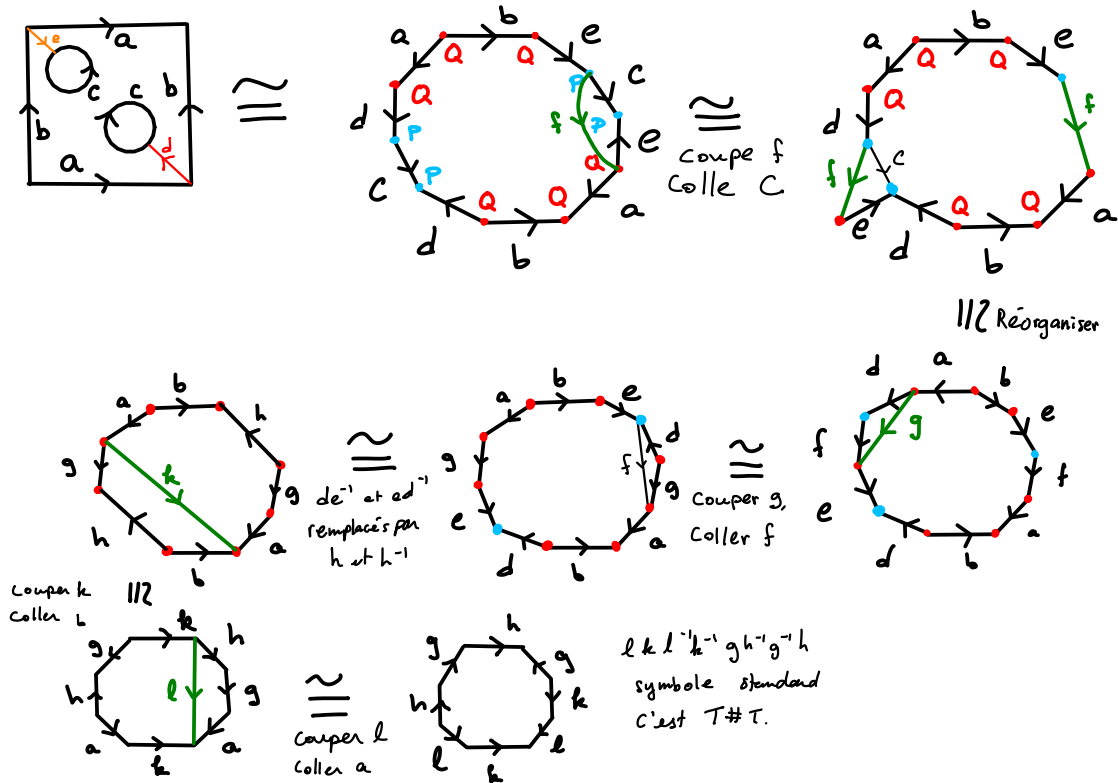
Exercice 16. Identifier les surfaces suivantes.





Solution. Pour le a) et b), on peut faire des découpages-recollements comme suit.

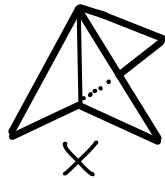
a)



Exercice 17. Soit T_1, T_2, T_3 trois triangles pleins dans $\mathbb{R}^2$. Soit e_i un côté de T_i pour $i = 1, 2, 3$. On pose

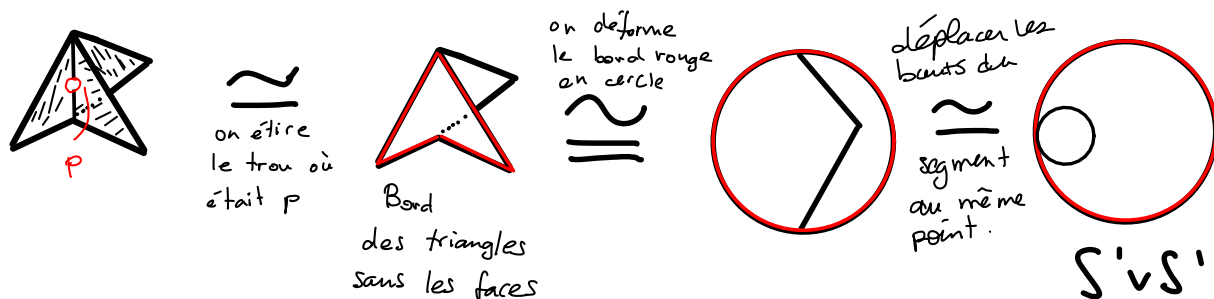
$$X = T_1 \sqcup T_2 \sqcup T_3 / \sim,$$

où $\sim$ identifie e_1, e_2, e_3 sur une même arête. (Voir le dessin.) Montrer que X n'est pas une variété de dimension 2.



Solution. Supposons le contraire. Soit p un point sur l'arête e_1, e_2, e_3 . Il existe un voisinage ouvert U de p dans X et un homéomorphisme $\varphi: U \rightarrow B(0, 1)$. On peut supposer que $\varphi(p) = (0, 0)$.

Si on enlève p de U et $(0,0)$ de $B(0,1)$, φ induit un homéomorphisme entre $U \setminus \{p\}$ et $\dot{B}(0,1)$, que l'on note aussi φ . Or, il est clair que $\dot{B}(0,1) \simeq S^1$, donc $\pi_1(\dot{B}(0,1), *) \cong \mathbb{Z}$, mais $U \setminus \{p\} \simeq S^1 \vee S^1$. En effet, on peut le voir la figure.



Cela est une contradiction, puisque les deux domaines sont homéomorphes, ils auraient dû avoir le même groupe fondamental. Ainsi, il n'y a pas de tel homéomorphisme, d'où X n'est pas une variété de dimension 2.

Exercice 18[†]. Soit G un groupe abélien. Soit $G_i \subseteq G$ des sous-groupes, pour $i \in I$. On dit que G est une *somme directe* des G_i si pour tout $g \in G$, il existe des uniques $g_i \in G_i$ pour $i \in I$ tels que $g_i = 0$, l'élément neutre, pour tout $i \in I$ sauf un nombre fini de i et $g = \sum_{i \in I} g_i$. Si la famille $\{G_i\}_{i \in I}$ n'est pas une famille de sous-groupes d'un même groupe G , alors on pose $G := \prod_{i \in I} G_i$ et on fait la construction précédente avec $\varphi_i(G_i) \subseteq G$, où $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ est le plongement canonique.

- Soit $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $G_1 = \mathbb{Z} \times \{0\}$ et $G_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $G = G_1 \oplus G_2$.
- Montrer que si $N = \{1, \dots, n\}$, alors $\bigoplus_{j \in N} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$.

Exercice 19[†]. Soit G un groupe abélien. On dit que G est un *groupe libre abélien* de base $B \subseteq G$ si pour tout $g \in G$, il existe $b_i \in B$ et $\eta_i \in \mathbb{Z}$, pour $i = 1, \dots, n$, tels que $g = b_1^{\eta_1} \cdots b_n^{\eta_n}$ et cette expression est unique.

- Montrer que $G \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}$ est muni de l'addition.
- Soit $G = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ (un groupe libre) et $B = \{a_1, \dots, a_m\}$. Montrer que $G/[G, G] \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^m$.

Solution. a) Soit $\mathbb{Z}^B := \{f: B \rightarrow \mathbb{Z} \mid \#(B \setminus Z(f)) < \infty\}$, où $Z(f) = \{b \in B \mid f(b) = 0\}$. Autrement dit, ce sont les fonctions qui valent zéros partout, sauf en un nombre fini de zéros.

Pour chaque $b \in B$, on définit $f_b \in \mathbb{Z}^B$ par

$$f_b(c) = \delta(b, c) := \begin{cases} 1, & \text{si } b = c, \\ 0, & \text{si } b \neq c. \end{cases}$$

(Remarque : si $\#B = m < \infty$, alors $\mathbb{Z}^B$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ et f_i est simplement le vecteur

où la i -ième position vaut 1 et toutes les autres, 0.) On définit $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}^m$ par

$$\varphi(g) = \varphi(b_1^{\eta_1} \cdots b_m^{\eta_m}) = \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_m f_m,$$

où la dernière somme est bien un élément de $\mathbb{Z}^B$ puisque que c'est une somme finie. De plus, φ est bien définie, puisque la décomposition de g en $b_1^{\eta_1} \cdots b_m^{\eta_m}$ est unique.

Vérifions que φ est un homomorphisme. Pour b^η et c^ν , avec $b \neq c$, on a

$$\varphi(b^\eta c^\nu) = \eta f_b + \nu f_c = \varphi(b^\eta) + \varphi(c^\nu).$$

Pour $b^{\eta_1 + \eta_2}$, on a

$$\varphi(b^{\eta_1 + \eta_2}) = (\eta_1 + \eta_2) f_b = \eta_1 f_b + \eta_2 f_b = \varphi(b^{\eta_1}) + \varphi(b^{\eta_2}).$$

C'est deux cas permettent de conclure que φ est un homomorphisme.

On va maintenant définir φ^{-1} . Soit $f \in \mathbb{Z}^B$. On a

$$f = \sum_{b \in B \setminus Z(f)} f(b) f_b. \quad (*)$$

On a bien une égalité, car si $c \in Z(f)$, les deux côtés valent zéro. Si $c \in B$, alors f_c fait partie de la somme tous les autres f_b valent 0 en c , donc on trouve $f(c) f_c(c) = f(c) \cdot 1 = f(c)$. De plus, la décomposition de f en $\{f_b\}_{b \in B}$ est unique, car si

$$f = \sum_{a \in A} \eta_a f_a,$$

alors pour tout $b \in B$, on a $f(b) = \eta_b f_b(b)$, donc $\eta_b = f(b)$.

On définit $\psi: \mathbb{Z}^B \rightarrow G$ par

$$\psi(f) = \prod_{b \in B \setminus Z(f)} b^{f(b)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(f) &= \varphi \left(\prod_{b \in B \setminus Z(f)} b^{f(b)} \right) \\ &= \sum_{b \in B \setminus Z(f)} f(b) f_b = f \end{aligned}$$

On peut vérifier que $\psi \circ \varphi = id$ aussi. On conclut que φ est un isomorphisme.

Enfin, on pose $Z_b := \langle f_b \rangle$, c'est-à-dire le plus petit sous-groupe de $\mathbb{Z}^B$ qui contient f_b . Il est clair que $Z_b = \{m f_b \mid m \in \mathbb{Z}\}$, donc $Z_b \cong \mathbb{Z}$. De plus, puisque $(*)$ est une décomposition unique d'un élément de $\mathbb{Z}^B$, on a

$$\mathbb{Z}^B = \bigoplus_{b \in B} Z_b \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z}.$$

b) (Solution sans trop de détails.) On pose $N = [G, G]$. Un mot $w \in G$ devient wN dans le quotient. Puisque $[a_i, a_j] \in N$, cela signifie que a_i et a_j commutent dans le quotient. Ainsi, on peut rassembler tous les a_i ensemble dans wN , ce qui veut dire que wN s'écrit de façon unique en $wN = a_1^{\eta_1} \cdots a_m^{\eta_m} N$. Par le a), on conclut que $G/N \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z}$.

Exercice 20[†]. Soit G un groupe et N un sous-groupe normal. On considère le diagramme, dans lequel toutes les flèches sont des applications quotients,

$$\begin{array}{ccc} & G/N & \xrightarrow{s} (G/N)/[G/N, G/N] \\ & \nearrow q & \\ G & & \\ & \searrow p & \\ & G/[G, G] & \xrightarrow{r} (G/[G, G])/p(N) \end{array}$$

- Montrer qu'il existe un homomorphisme $u: G/N \rightarrow (G/[G, G])/N$ que l'on peut ajouter au diagramme pour qu'il commute, c'est-à-dire tel que $u \circ q = r \circ p$.
- Montrer qu'il existe un homomorphisme $v: G/[G, G] \rightarrow (G/N)/[G/N, G/N]$ que l'on peut ajouter au diagramme pour qu'il commute, c'est-à-dire tel que $v \circ p = s \circ q$.
- Montrer que u induit un homomorphisme $\varphi: (G/N)/[G/N, G/N] \rightarrow (G/[G, G])/p(N)$ et v induit un homomorphisme $\psi: (G/[G, G])/p(N) \rightarrow (G/N)/[G/N, G/N]$ de sorte que le diagramme commute

$$\begin{array}{ccccc} & G/N & \xrightarrow{s} & (G/N)/[G/N, G/N] & \\ & \nearrow q & & \uparrow \psi & \\ & & u & & \downarrow \varphi \\ G & & & & \\ & \searrow p & & & \\ & G/[G, G] & \xrightarrow{r} & (G/[G, G])/p(N) & \end{array}$$

- Montrer que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre. Conclure que $(G/N)/[G/N, G/N] \cong (G/[G, G])/p(N)$.
- Montrer que $\text{ab}(\pi_1(\#^n T, *)) \cong \mathbb{Z}^{2n}$.
Suggestion. Utiliser le d) avec $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \rangle$ et $N = \langle [a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n] \rangle$.
- Montrer que $\text{ab}(\pi_1(\#^n \mathbb{R}P^2, *)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$.
Suggestion. Montrer d'abord que $\text{ab}(\pi_1(\#^n \mathbb{R}P^2, *)) \cong \mathbb{Z}^n / \langle (2, \dots, 2) \rangle$.