

Topologie

Série 4

Classification des surfaces

1. Variétés topologiques

Exercice 1. a) Montrer qu'un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une variété topologique.

b) Trouver un exemple d'un fermé $F \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que F est une variété topologique et un exemple où F n'est pas une variété topologique.

Exercice 2. Montrer que S^n est une variété topologique compacte pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Montrer que $X = \{x^2 + y^2 < 1\} \cap \{y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ n'est pas une variété topologique.

Exercice 4. Une lemniscate de Bernoulli est un ensemble $\{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2)\}$ pour un $d > 0$ fixé. Montrer qu'une lemniscate de Bernoulli, muni de la topologie relative, n'est pas une variété.

Indice. Le paramétrage $\begin{cases} x = d \cos \theta \sqrt{2 \cos(2\theta)} \\ y = d \sin \theta \sqrt{2 \cos(2\theta)} \end{cases}$ vous sera peut-être utile, bien qu'il ne soit pas nécessaire.

Exercice 5. Une *courbe paramétrique* dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction continue $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle. Montrer que l'image d'une courbe paramétrique $\varphi(I)$, muni de la topologie relative, n'est pas nécessairement une variété topologique.

Exercice 6. On considère H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) où

$$H_1 = H_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}, \quad H_2 = H_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\},$$

chacun muni de la topologie relative de $\mathbb{R}^2$. On pose $X = H_1 \sqcup \dots \sqcup H_4 / \sim$, où $\sim$ est l'identification sur la figure 1.

a) Montrer que X est une surface.

b) Trouver un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que X est homéomorphe à U .

Indice. Il y a une fonction de l'analyse complexe qui donne un homéomorphisme explicite. Cependant, il est suffisant d'illustrer un homéomorphisme avec des dessins sans formules.

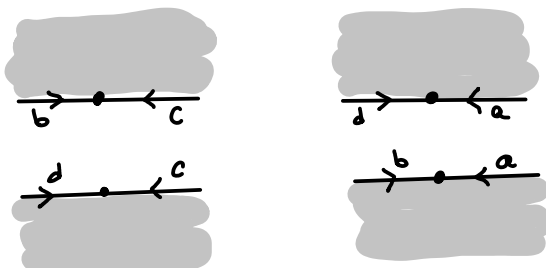


Figure 1. Identification des H_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Exercice 7. Un espace topologie (X, τ) est à *base dénombrable* s'il existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ dénombrable tel que $\tau = \tau(\mathcal{A})$. La définition habituelle d'une variété demande qu'elle soit à base dénombrable.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est à base dénombrable.

b) Montrer qu'un espace métrique compact (X, d) est à base dénombrable.

Indice. Considérer $\{B(x, 1/n) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}^*\}$.

c) Montrer qu'une variété compacte est à base dénombrable.

d)[†] Soit $\sim$ la relation sur $\mathbb{R}$ qui identifie tous les $n \in \mathbb{Z}$ en un seul point. On pose $X = \mathbb{R}/\sim$ muni de la topologie quotient. Montrer que X n'est pas à base dénombrable. (Cet exemple montre que la topologie quotient ne préserve pas nécessairement cette propriété.)

Exercice 8. Soit M une variété topologique de dimension n . On dit que $N \subseteq M$ est une *sous-variété* de dimension m si N muni de la topologie relative est une variété de dimension m . Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, il existe une sous-variété de dimension m dans S^n homéomorphe à S^m .

Exercice 9. Un *plongement* d'un espace topologique (X, τ) dans un autre espace topologique (Y, τ') est une application $f: X \rightarrow Y$ telle que f est un homéomorphisme de X dans $f(X)$, où $f(X)$ est munie de la topologie relative à Y . Soit M, N deux variétés. Montrer que si $f: M \rightarrow N$ est un plongement, alors $f(M)$ est une sous-variété de N .

Remarque. Il est alors commun d'identifier M à $f(M)$ et d'écrire, par abus de notation, $M \subseteq N$.

Exercice 10. On pose $\overline{\mathbb{H}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Une variété à bord de dimension 2 est un espace topologique (X, τ) Hausdorff tel que pour chaque $z \in X$, il existe un voisinage ouvert U de z dans X tel que U est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\overline{\mathbb{H}}$. Le bord de X , noté ∂X , est l'ensemble des z qui n'ont aucun voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- a) Montrer que si $z = (x, 0) \in \overline{\mathbb{H}}$, alors il n'y a aucun voisinage ouvert de z homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- b) Montrer que $z \in \partial X$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de z dans X , un ouvert V dans $\overline{\mathbb{H}}$ et un homéomorphisme $h: U \rightarrow V$ tels que $h(z) \in \partial \overline{\mathbb{H}}$.

Exercice 11. Une surface à bord est une variété à bord connexe de dimension 2.

- a) Montrer que si X est une surface à bord, alors chaque composante de ∂X est une variété de dimension 1 (sans bord).
- b)[†] Montrer que si X est de plus compact, alors chaque composante est homéomorphe à S^1 .
- c) Soit Y une surface (sans bord). Soit U un ouvert de Y homéomorphe au disque unité $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}^2$ et soit $h: U \rightarrow \mathbb{D}$ un homéomorphisme. Soit $\mathbb{D}_{1/2} = B((0, 0), \frac{1}{2})$. Montrer que $X := Y \setminus h^{-1}(\mathbb{D}_{1/2})$ est une variété à bord.
- d) Montrer que si Y est compact au b), alors X est compact.

2. Théorème de classification des surfaces compactes

Exercice 12. a) Montrer que $K \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

- b) Montrer que $\mathbb{R}P^2 \# T \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Exercice 13. Pour chacun des symboles suivants, dessiner le polygone correspond en y indiquant les lettres et les flèches sur les arêtes. Trouver un symbole standard associé et identifier la surface. Décomposer la démarche de la solution en petites étapes simples de découpage-recollement en indiquant le découpage et les arêtes recollées.

- a) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$
- b) $abab$
- c) $aabb^{-1}$
- d) $acd^{-1}ba^{-1}dc^{-1}b^{-1}$
- e) $abba^{-1}cddc^{-1}$

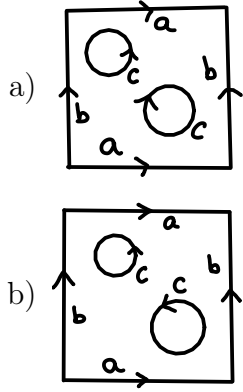
Exercice 14. Trouver une triangulation du tore avec

- a) 4 triangles;
- b) 6 triangles.

Exercice 15. Pour chacune des surfaces, déterminer le nombre de points distincts auxquels les sommets sont identifiés. Si ce nombre est plus que 1, trouver un polygone équivalent pour lequel tous les sommets sont identifiés à un seul point.

- a) $abcabc$
- b) $abcdabcd$

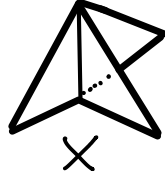
Exercice 16. Identifier les surfaces suivantes.



Exercice 17. Soit T_1, T_2, T_3 trois triangles pleins dans $\mathbb{R}^2$. Soit e_i un côté de T_i pour $i = 1, 2, 3$. On pose

$$X = T_1 \sqcup T_2 \sqcup T_3 / \sim,$$

où $\sim$ identifie e_1, e_2, e_3 sur une même arête. (Voir le dessin.) Montrer que X n'est pas une variété de dimension 2.



Exercice 18[†]. Soit G un groupe abélien. Soit $G_i \subseteq G$ des sous-groupes, pour $i \in I$. On dit que G est une *somme directe* des G_i si pour tout $g \in G$, il existe des uniques $g_i \in G_i$ pour $i \in I$ tels que $g_i = 0$, l'élément neutre, pour tout $i \in I$ sauf un nombre fini de i et $g = \sum_{i \in I} g_i$. Si la famille $\{G_i\}_{i \in I}$ n'est pas une famille de sous-groupes d'un même groupe G , alors on pose $G := \prod_{i \in I} G_i$ et on fait la construction précédente avec $\varphi_i(G_i) \subseteq G$, où $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ est le plongement canonique.

a) Soit $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $G_1 = \mathbb{Z} \times \{0\}$ et $G_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $G = G_1 \oplus G_2$.

b) Montrer que si $N = \{1, \dots, n\}$, alors $\bigoplus_{j \in N} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$.

Exercice 19[†]. Soit G un groupe abélien. On dit que G est un *groupe libre abélien* de base $B \subseteq G$ si pour tout $g \in G$, il existe $b_i \in B$ et $\eta_i \in \mathbb{Z}$, pour $i = 1, \dots, n$, tels que $g = b_1^{\eta_1} \cdots b_n^{\eta_n}$ et cette expression est unique.

a) Montrer que $G \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}$ est muni de l'addition.

b) Soit $G = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ (un groupe libre) et $B = \{a_1, \dots, a_m\}$. Montrer que $G/[G, G] \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^m$.

Exercice 20[†]. Soit G un groupe et N un sous-groupe normal. On considère le diagramme, dans lequel toutes les flèches sont des applications quotients,

$$\begin{array}{ccc}
 & G/N & \xrightarrow{s} (G/N)/[G/N, G/N] \\
 q \nearrow & & \\
 G & & \\
 p \searrow & & \\
 & G/[G, G] & \xrightarrow{r} (G/[G, G])/p(N)
 \end{array}$$

- Montrer qu'il existe un homomorphisme $u: G/N \rightarrow (G/[G, G])/p(N)$ que l'on peut ajouter au diagramme pour qu'il commute, c'est-à-dire tel que $u \circ q = r \circ p$.
- Montrer qu'il existe un homomorphisme $v: G/[G, G] \rightarrow (G/N)/[G/N, G/N]$ que l'on peut ajouter au diagramme pour qu'il commute, c'est-à-dire tel que $v \circ p = s \circ q$.
- Montrer que u induit un homomorphisme $\varphi: (G/N)/[G/N, G/N] \rightarrow (G/[G, G])/p(N)$ et v induit un homomorphisme $\psi: (G/[G, G])/p(N) \rightarrow (G/N)/[G/N, G/N]$ de sorte que le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc}
 G/N & \xrightarrow{s} & (G/N)/[G/N, G/N] \\
 q \nearrow & u \searrow & \uparrow \psi \\
 G & & \\
 p \searrow & v \nearrow & \downarrow \varphi \\
 G/[G, G] & \xrightarrow{r} & (G/[G, G])/p(N)
 \end{array}$$

- Montrer que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre. Conclure que $(G/N)/[G/N, G/N] \cong (G/[G, G])/p(N)$.
- Montrer que $\text{ab}(\pi_1(\#^n T, *)) \cong \mathbb{Z}^{2n}$.
Suggestion. Utiliser le d) avec $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \rangle$ et $N = \langle [a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n] \rangle$.
- Montrer que $\text{ab}(\pi_1(\#^n \mathbb{R}P^2, *)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$.
Suggestion. Montrer d'abord que $\text{ab}(\pi_1(\#^n \mathbb{R}P^2, *)) \cong \mathbb{Z}^n / \langle (2, \dots, 2) \rangle$.